



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06906487 5





COURS DE MATHÉMATIQUE,

CONTENANT
TOUTES LES PARTIES DE CETTE SCIENCE,
MISES A LA PORTÉE DES COMMENÇANTS.

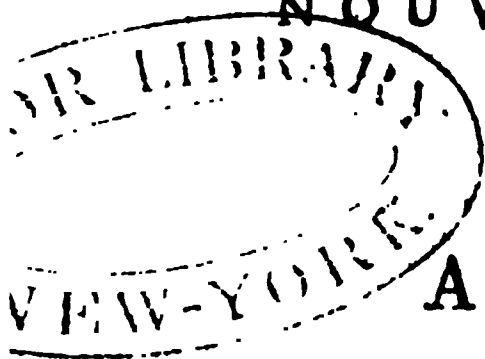
*PAR M. CHRÉTIEN WOLF, Professeur de
Mathématique & de Philosophie dans l'Université
de Hale, Membre des Académies Royales des Sciences
de France, d'Angleterre, & de Prusse.*

Traduit en François, & augmenté considérablement.

TOME PREMIER,

QUI renferme les Eléments d'Arithmétique, le Calcul des parties décimales, le Calcul littéral, la Géométrie, la Trigonométrie rectiligne, la Méchanique, l'Hydrostatique, l'Airométrie, & l'Hydraulique ; avec un Supplément au Calcul littéral.

NOUVELLE ÉDITION.



A PARIS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour
l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'image Notre-Dame.

M. DCC. LVII.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.



AVIS AU RELIEUR

Pour placer les 69 Planches de cet Ouvrage :

TOUTES les planches se plieront en trois , en conservant le papier blanc pour les faire sortir hors du livre , & se placeront à la fin du traité auquel elles appartiennent , dans l'ordre suivant.

T O M E P R E M I E R.

- 1 La planche d'Arithmétique , à la fin de l'Arithmétique palpable, page 154
- Il n'y a point de planches au Calcul des décimales , ni aux Eléments du Calcul littéral.
- 8 Les 8 planches de Géométrie , à la fin des Eléments de Géométrie, 268
- 1 La planche de Trigonométrie , à la fin de ce traité , 290
- 3 Les trois planches de Méchanique , à la fin de la Méchanique , 344
- 1 La planche d'Hydrostatique & d'Airométrie , qui ne fait qu'une seule planche , à la fin de l'Airométrie , 384
- 2 Les deux planches d'Hydraulique , à la fin des Eléments d'Hydraulique , avant le supplément au Calcul littéral , 404

T O M E S E C O N D.

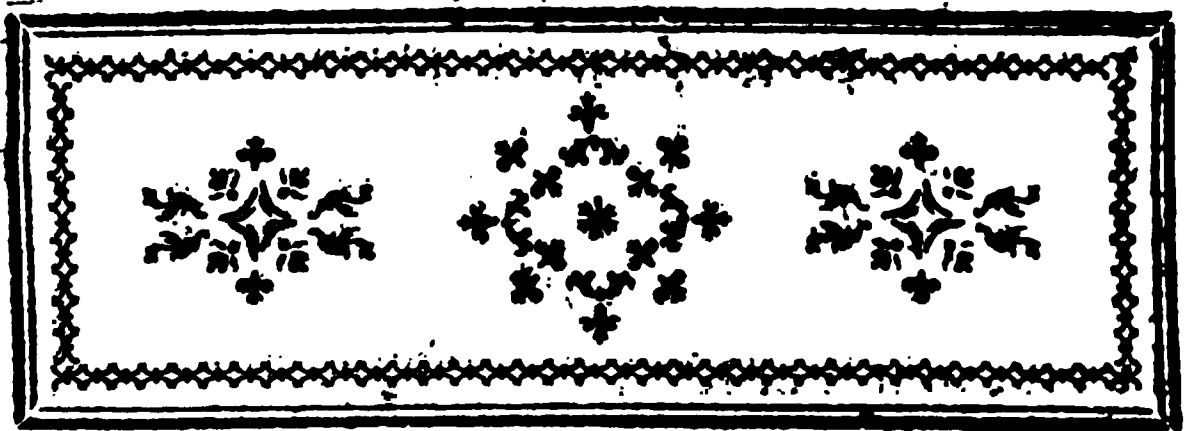
- 1 La planche d'Optique , à la fin de ce traité , page 26
- 1 La planche de Catoptrique , à la fin de la Catoptrique , 47
- 2 Les deux planches de Dioptrique , à la fin des Eléments de Dioptrique , 82
- 6 Les six planches de Perspective , à la fin de ce traité , 114
- 1 La planche de Géographie , à la fin de la Géographie , 150
- Il n'y a point de planches au Traité de Chronologie.
- 4 Les quatre planches de Gnomonique , à la fin des Eléments de Gnomonique , 206
- 3 Les trois planches d'Astronomie , à la fin de ce traité , 323
- 2 Les deux planches de Navigation , à la fin du second volume , 357.

TOME TROISIEME.

- 6 Les six planches de la Fortification se placeront à la fin
des Eléments de Fortification, page 61
- 5 Les cinq planches d'Attaque des Places, à la fin de l'At-
taque & Défense des Places, 102
- 6 Les six planches d'Artillerie, à la fin de l'Artillerie, 148
- 1 La planche des feux d'Artifice, après ce traité, 210
- 15 Les quinze planches d'Architecture, à la fin du tome
troisième, avant la Table des Matières, 326



DISCOURS



P R É F A C E

D U T R A D U C T E U R.

RIEN de plus propre à joindre l'agréable à l'utile que les Mathématiques. On le fait, & on l'a reconnu particulièrement dans notre siècle, où l'on a trouvé l'heureux secret d'unir la solidité des sciences abstraites avec la politesse des connoissances du goût. Ce n'est plus un terrain hérissé d'épines & d'un difficile accès; on se livre avec satisfaction aux méditations profondes que demandent les Mathématiques, quand on est capable de goûter le plaisir que procure la découverte des vérités qui en font l'objet; & l'on regarderoit avec raison comme des esprits superficiels, de peu de consistance, & sans goût, ceux qui s'en formeroient l'idée comme d'une science austère & sauvage, qui ne sauroit s'allier avec la délicatesse des belles Lettres.

L'objet des Mathématiques est la vérité
Tome I.

pure ; ses preuves sont des démonstrations exactes, & ses effets des choses surprenantes. Nous avons peu de commodités dans la vie, peu d'embellissements dans tout ce qui se présente à nos yeux , dont nous ne soyons redevables à ceux qui ont consacré leurs veilles à cultiver cette science, qu'on regarde à juste titre comme la clef de toutes les autres. Y a-t-il rien de plus merveilleux que toutes ces machines animées, si j'ose le dire , par les Mathématiques, qui dirigent l'arrangement de leurs ressorts, reglent leur mouvement , & conduisent toutes leurs opérations ? Quoi de plus admirable, que ces instruments qui décorent les boutiques des artisans, & qui certainement ne manqueroient pas de spectateurs, si nous savions admirer l'esprit & l'invention qui y brille par-tout. L'envie de savoir, si naturelle à l'homme, se réveilleroit à cet aspect : ce desir ardent d'acquérir toujours de nouvelles connoissances, se ranimeroit à la vue de si belles choses. Car l'esprit de l'homme veut tout savoir ; & rien ne marque mieux combien il est destiné à la vérité, que le charme qu'il éprouve quelquefois malgré lui, dans les spéculations les plus seches de l'algebre.

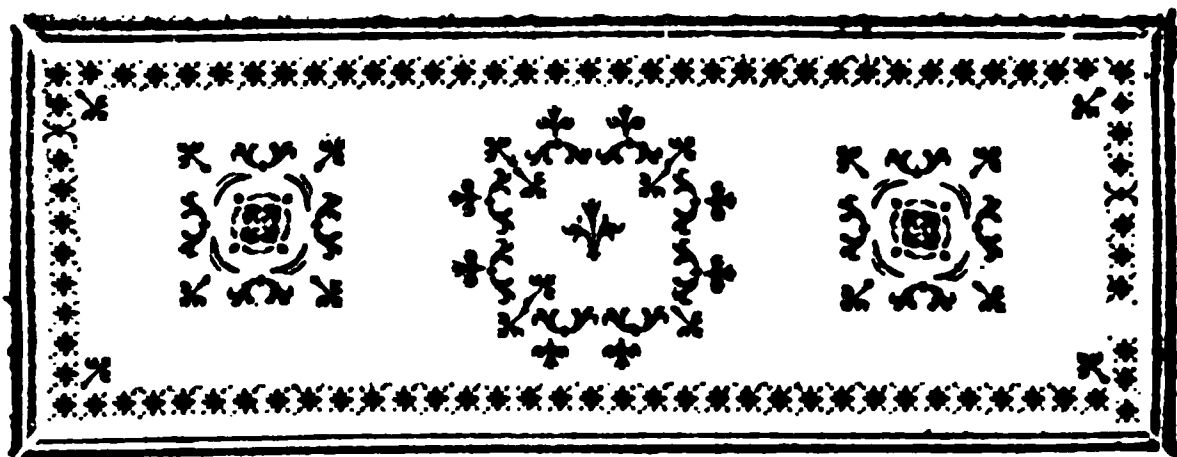
Les Mathématiques, en ouvrant l'esprit, développent ses facultés, lui en ménagent l'usage, & le forment à la précision.

Elles l'habituent à l'attention en le fixant ; elles lui donnent de l'étendue en multipliant ses lumières, de la pénétration & de la délicatesse par l'exercice ; leur méthode y grave insensiblement cet ordre dans les idées & cette justesse de raisonnement qui rendent un homme véritablement homme. Mais la méthode qui produit de si beaux fruits , est celle des anciens Géomètres , & de laquelle nous remettons à parler dans le Discours préliminaire, à la suite de cette Préface.

Le grand ouvrage que M. Wolf avoit donné selon cette méthode, premièrement en Allemand, puis en Latin, ayant paru d'une trop grande étendue pour le donner en leçons dans le temps fixé pour un Cours de Mathématiques, il en fit un abrégé pour l'usage particulier des Ecoles ; mais cet abrégé est si succinct que je n'ai pas cru devoir me contenter d'en donner une simple traduction. Je suis entré dans un plus grand détail : j'ai changé quantité de choses qui ne me paroissent pas du goût françois : j'ai souvent étendu le discours beaucoup plus qu'il ne l'étoit dans l'original : j'ai inferé des remarques, sans les distinguer du texte, dans bien des endroits où je les ai cru nécessaires. J'ai ajouté quantité de définitions des termes

& des choses, des suppléments à certains traités, des traités même entiers, pour rendre l'ouvrage complet; tels sont l'Arithmétique palpable dans le premier volume, la Navigation dans le second, & les Feux d'Artifice dans le troisieme, dans lesquels je n'ai suivi M. Wolf, pour ainsi dire, que dans la méthode. Ces augmentations & ces changements m'ont obligé d'augmenter de près de la moitié le nombre des planches, dont j'ai changé la plupart des desseins, & les ai fait graver avec plus d'élégance & de goût: de maniere que c'est un ouvrage tout nouveau, ou du moins si différent de ce que M. Wolf avoit dit sur ces matieres, qu'il ne s'y reconnoîtroit pas lui-même. Les Lecteurs trouveront dans ces trois volumes, non seulement de quoi se former une idée des sciences qui y sont traitées, mais tout ce qu'il faut pour être en état de les entendre, d'en parler avec exactitude, & de les étudier par eux-mêmes dans les livres qui en traitent plus au long. Le public attendoit cette traduction avec impatience: il est heureux pour moi d'avoir travaillé à le satisfaire; mais je m'estimerai plus heureux encore, si mon travail remplit pleinement les vues que je me suis proposées.

DISCOURS



DISCOURS PRÉLIMINAIRE

*SUR LA MÉTHODE DONT ON SE SERT,
pour traiter les Mathématiques.*

§. I.

LA *Méthode Mathématique* n'est autre chose que l'ordre que suivent les Mathématiciens en traitant les sciences qui font partie des mathématiques. On commence par les *Définitions*, on continue par les *Axiomes*, d'où l'on forme des *Théorèmes*, puis des *Problèmes*, qui produisent des *Corollaires*, & l'on y lie des *Remarques*, selon que les uns ou les autres en ont besoin.

§. II.

Les *Définitions* sont des notions claires & distinctes par le moyen desquelles on distingue non seulement une chose d'avec une autre, mais qui nous y feront encore découvrir tout ce qu'on peut en concevoir. On les réduit à deux sortes, les *Définitions nominales*, & les *Définitions réelles*, ou, si l'on veut, *Définitions des noms* & *Définitions des choses*.

§. III.

Les définitions des noms renferment des marques suffisantes pour faire distinguer une chose qui porte tel ou tel nom , d'avec une autre chose qui en porte un différent : comme lorsqu'on dit dans la Géométrie , le quarré est une figure qui a quatre angles & quatre côtés.

§. IV.

Les définitions réelles expliquent clairement la formation des choses , c'est-à-dire , la manière dont elles se font. Telle est , par exemple , la définition du cercle dans la Géométrie , lorsqu'on dit qu'il se fait par le mouvement d'une ligne droite autour d'un point fixe.

§. V.

La *Notion* est la représentation que l'esprit se forme de quelque chose que ce puisse être.

§. VI.

La *Notion claire* est celle qui suffit pour reconnoître une chose qui nous est présentée ; pour dire, par exemple , une telle figure est un *triangle*.

§. VII.

La *Notion obscure ou confuse* est au contraire celle qui ne suffit pas pour déterminer précisément ce que c'est que telle chose. Si l'on me mon-

tre, par exemple, une planre, & que l'ayant examinée, je doute encore si je l'ai vue ailleurs, ou si cette plante est celle qui porte tel ou tel nom, c'est alors une notion obscure.

§. VIII.

Une notion claire est *distincte*, lorsqu'on peut expliquer les marques auxquelles on reconnoît la chose qu'on nous présente; par exemple, que le cercle est une figure terminée par une ligne courbe revenant sur elle-même, dont chaque point est également éloigné de celui qui est au centre.

§. IX.

Une notion claire est *confuse* quand vous ne pouvez dire ce à quoi vous reconnoissez telle chose, quoiqu'elle ait néanmoins des marques qui la distinguent des autres. Telle est, par exemple, la notion qu'on a de la couleur rouge.

§. X.

La notion distincte est *entiere*, & peut être censée *parfaite*, lorsque vous connoissez distinctement toutes les parties qui composent une chose, & les marques qui vous la font distinguer d'une autre. Par exemple, la notion du cercle dont je viens de parler (§. VIII) est censée une notion parfaite, si vous avez une connoissance distincte d'une courbe qui retourne sur elle-même, d'un point placé au milieu, d'une égalité de distance, & de la termination.

§. XI.

La notion est au contraire *imparfaite*, si l'on n'a que des connoissances confuses & obscures des parties de la chose & des marques qui la distinguent d'une autre.

§. XII.

On n'admet dans les mathématiques que des notions distinctes, & même autant entières & parfaites qu'elles peuvent l'être, quand il s'agit de donner des définitions des noms & des choses.

§. XIII.

Ainsi dans les définitions contenues dans cet ouvrage on n'emploiera que des termes assez intelligibles par eux-mêmes, ou dont l'explication aura précédé.

§. XIV.

Lorsque nous nous contentons d'une notion confuse, nous supposons qu'on peut avoir aisément entre les mains les choses dont on veut parler, pour s'en instruire par ses propres yeux; ou que l'ayant vue souvent, il sera facile de se la retracer dans la mémoire.

§. XV.

Quant aux définitions réelles, elles nous apprennent comment la chose est possible, c'est-à-dire, la voie qu'il faut tenir, & de la manière de

former cette chose (§. IV). Voilà pourquoi il y a deux choses à observer sur cette espèce de définition : 1°. savoir si ce qui doit concourir à la formation de la chose existe , ou peut exister : 2°. si elles ont véritablement les propriétés que nous leur attribuons ; par exemple , s'il est vrai *qu'un cercle se puisse faire par le mouvement d'une ligne droite autour & à égale distance d'un point fixe*. Il faut, pour que la chose soit possible, un point, une ligne droite , l'immobilité d'un point qui puisse régler le mouvement de la ligne ; & enfin un mouvement de la ligne tel qu'elle retourne au point même d'où elle étoit partie.

§. XVI.

On peut considérer les définitions de noms & les définitions réelles en elles-mêmes, & les comparer les unes aux autres. Lorsqu'en les considérant on en conclut immédiatement quelque chose, ce qu'on en conclut s'appelle *Axiome*. En examinant , par exemple , la formation d'un cercle , on en conclut aisément que toutes les lignes menées du centre à la circonférence , sont égales , puisqu'elles ne représentent qu'une même ligne placée en différents endroits du cercle , & voilà pourquoi cette proposition passe pour un axiome : M. de Tschirnausen prend ce terme dans ce sens-là. On appelle communément *Axiome* , toute proposition qui est si évidente , qu'elle n'a pas besoin de démonstration ; ce qui est conforme à l'idée qu'Euclide & les autres anciens Géomètres en ont eue.

§. XVII.

Les axiomes expriment l'existence d'une chose, ou sa possibilité. Ceux de la première espèce sont ceux dont nous venons de donner un exemple ; à savoir, *toutes les lignes menées du centre d'un cercle à sa circonférence sont égales entre elles*. Les axiomes de la seconde espèce sont, par exemple, la proposition qui naît de la définition de la ligne droite ; à savoir que *d'un point à un autre point on peut tirer une ligne droite*. Les axiomes de cette espèce s'appellent *pétitions* ou *demandes*.

§. XVIII.

Comme la vérité de ces deux espèces d'axiomes est connue par le seul aspect des définitions d'où ils naissent, ils n'ont besoin d'aucune démonstration ; car cette même vérité devient évidente par la seule preuve de la réalité des définitions. C'est pourquoi on ne peut porter un jugement certain sur la vérité ou la fausseté d'un axiome, avant d'avoir examiné la possibilité de la définition. Autrement on seroit simplement assuré que l'axiome sera vrai, si l'on suppose la définition possible.

§. XIX.

On confond quelquefois ces deux espèces d'axiomes avec les expériences. Or nous disons *savoir une chose par expérience*, lorsque la connoissance que nous en avons nous est venue de l'attention que nous avons faite sur nos propres perceptions : par exemple, lorsqu'on allume une chan-

delle dans un lieu obscur , nous voyons autour de nous bien des choses que nous n'appercevions pas auparavant ; nous disons alors que nous savons par expérience qu'on ne peut voir dans l'obscurité sans lumière. Les expériences ne sont donc que des propositions qui regardent des choses particulières , puisque nous n'appercevons les choses qu'en particulier.

§. XX.

Lorsqu'ayant comparé plusieurs définitions les unes avec les autres , nous inférons quelque proposition que nous n'aurions pu tirer de l'examen d'une seule , la conclusion que nous en tirons s'appelle *Théorème*. Par exemple, dans la Géométrie, je compare un triangle avec un parallélogramme posés sur la même base , & ayant même hauteur. J'infere, partie de leurs définitions, partie de leurs propriétés déjà connues , qu'un tel parallélogramme est le double du triangle ; alors cette proposition , *un triangle est la moitié d'un parallélogramme qui a même base & même hauteur* , est un *Théorème*.

§. XXI.

Deux choses dans les Théorèmes demandent beaucoup d'attention : la *proposition* en elle-même & la *démonstration*. La première indique ce qui peut convenir ou non à une chose , certaines conditions une fois posées ; la seconde donne & explique les raisons qui nous font concevoir que cela convient à une telle chose , ou ne lui convient pas.

§. XXII.

Les principes des démonstrations sont en partie les définitions des termes & des choses contenus dans la proposition, & en partie les propriétés que nous découvrons des choses dans leurs définitions. Or comme on n'admet point de principes dans les mathématiques, qui n'aient été prouvés auparavant, on cite communément les définitions & les propositions d'où on les a tirés, tant pour montrer la simplicité & la vérité des principes sur lesquels on établit son raisonnement, que pour indiquer à ceux qui ne sont pas bien au fait, les sources de la certitude de ces mêmes principes.

§. XXIII.

La méthode qu'on suit dans les mathématiques pour tirer les conséquences des principes, est la même que celle qu'on trouve dans les traités de Logique, où l'on parle du syllogisme : car les démonstrations des Mathématiciens ne sont autre chose qu'un assemblage d'enthymêmes ; de façon qu'on y conclut tout par la force des syllogismes, excepté qu'on omet souvent les prémisses qui se présentent d'elles-mêmes à l'esprit, ou que l'on rappelle dans la mémoire à l'aide des citations. Clavius prouve ce que nous venons de dire dans sa démonstration de la première proposition des Éléments d'Euclide. Herlinus & Dasipodius ont démontré par des syllogismes en forme, les six premiers livres des Éléments d'Euclide, & Henischius toute l'Arithmétique.

§. XXIV.

Les *Problèmes* proposent quelque chose à faire ; & sont composés de trois parties, qui sont la *Proposition* , la *Solution* & la *Démonstration*. Dans la proposition on indique ce qu'on propose à faire ; la solution donne par ordre tous les moyens de réussir à faire la chose proposée ; & la démonstration prouve qu'on doit nécessairement en venir à bout , en suivant la méthode & les moyens que la solution prescrit. C'est pourquoi toutes les fois qu'un Problème a besoin de démonstration , on le convertit en Théorème, dont la proposition constitue la question , & la solution forme l'*hypothèse*. Car telle est ordinairement la teneur de tous les Problèmes auxquels il faut une démonstration ; & en suivant ce que prescrit la solution , on fait en même temps la chose proposée.

§. XXV.

On est quelquefois obligé d'appliquer à certains cas particuliers des propositions générales , d'où l'on tire souvent d'autres propositions dont la conséquence est aisée. Alors ces propositions se nomment *Corollaires*.

§. XXVI.

Dans les *Remarques* ou *Scholies* , on dit ce qu'il y a d'obscur ; on répond aux choses qui sont douteuses ; on indique l'usage des sciences , les sources où l'on peut étudier les matières , les Auteurs qui en ont traité ; enfin tout ce qu'il est bon, utile & agréable à savoir.

§. XXVII.

Tout homme qui fera un peu d'attention à la méthode que nous venons d'expliquer , verra facilement qu'elle est universelle , & qu'on ne peut guere , sans la suivre , parvenir à une solide connoissance des choses. On lui a donné le nom de *Méthode Mathématique* , & même souvent celui de *Méthode des Géometres* , parceque les Mathématiciens ont été jusqu'ici presque les seuls qui l'aient suivie scrupuleusement.

§. XXVIII.

La méthode dont nous venons de parler étant si conforme au goût universel , & à la façon commune de raisonner, est-il surprenant qu'on regarde les Mathématiques comme l'étude la plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit , & à former le jugement ? On remarque dans ceux qui cultivent cette science , une facilité & une promptitude étonnante à saisir le vrai des autres sciences auxquelles ils s'appliquent dans la suite ; pendant que tant d'autres qui d'ailleurs ont de l'esprit , de la force d'imagination , du jugement même , ont tant de peine à en venir à bout ; & cela parcequ'ils ne se sont pas formé l'habitude d'un certain ordre & d'une certaine exactitude dans leurs jugements.

§. XXIX.

Tous ceux qui emploient donc tout leur temps à l'étude de certaines pratiques & de certaines sciences qui ne font point partie des Mathémati-

ques, mais qu'on regarde communément comme leur appartenant, n'en retireront jamais tout le fruit qu'on peut se promettre de l'étude des Mathématiques. Car quoique ces sortes de sciences soient d'ailleurs fort utiles au commerce de la vie, elles ne seront jamais bien capables de leur donner cette force d'esprit, cette vivacité, & cette habitude d'invention que l'on puise dans l'étude des véritables mathématiques, parceque tout cela est le fruit des méditations & des réflexions sérieuses que l'on fait sur les démonstrations.

La *Méthode* est l'art de bien disposer une suite de plusieurs raisonnements, tant pour découvrir la vérité d'un théorème quand nous l'ignorons, que pour la démontrer aux autres quand nous l'avons trouvée. Il y a deux méthodes générales pour rechercher les vérités dans les mathématiques; savoir la *Synthese* & l'*Analyse*. Celle dont on se sert pour résoudre un problème mathématique se nomme *Zététique*; & celle qui détermine quand, par quelle raison, & en combien de façons un problème peut se résoudre, s'appelle *Poristique*.

La *Synthese* est l'art de chercher les vérités ou les démonstrations, la possibilité ou l'impossibilité d'une proposition, par des raisonnements tirés des principes, c'est-à-dire, par des propositions qui se démontrent l'une par l'autre, en commençant par les plus simples, pour passer aux plus générales & plus composées, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la *conclusion* qui nous donne une connoissance claire & distincte de la vérité qu'on cherche.

L'*Analyse* est l'art de découvrir la vérité ou la fausseté, la possibilité ou l'impossibilité d'une proposition par un ordre contraire à celui qu'on suit

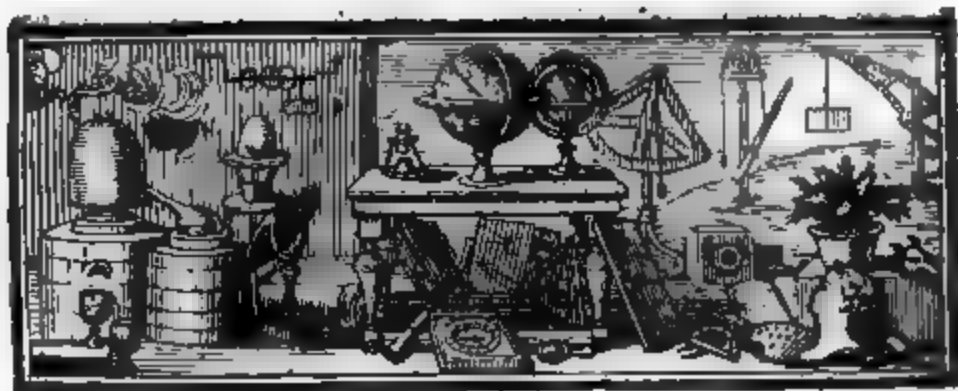
xij DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

dans la synthèse ; savoir en supposant la proposition telle qu'elle est, & en examinant ce qui s'ensuit de là , jusqu'à ce qu'on soit venu à quelque vérité claire , ou à quelque impossibilité dont ce qui a été proposé soit une suite nécessaire , pour conclure de là la vérité ou l'impossibilité de la proposition.

L'*Hypothèse* est une supposition de ce qui n'est pas pour ce qui peut être ; aussi n'est-il pas nécessaire que l'hypothèse soit véritable , mais il suffit qu'elle soit possible. C'est pourquoi on peut faire plusieurs hypothèses différentes sur un même sujet.



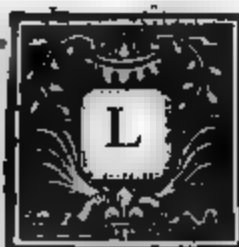
ELÉMENTS



ELEMENTS D'ARITHMETIQUE.

DEFINITION PREMIERE.

1.



ARITHMETIQUE est la Science qui apprend à compter.

On entend par compter, sçavoir ajouter, soustraire, multiplier, & diviser. Comme 6 & 8 font 14, c'est *ajouter*; qui de 12 ôte 5, reste 7, c'est *soustraire*; si l'on dit 3 fois 8 font 24, c'est *multiplier*; enfin 5 est dans 20 quatre fois, c'est *diviser* 20 par 5.

Remarque :

2. Par le mot de *Science*, on veut signifier toute ce qui est déduit de principes clairs & évidens.

DEFINITION II.

3. Le *Nombre* est l'assemblage de plusieurs unités de même espece, par exemple, si à un écu on ajoute un autre écu, on aura deux écus; ainsi 2, 3, 4, &c. sont des Nombres.

Tome I.

A

Corollaire I.

4. On ne peut faire la comparaison d'aucun nombre, si ces nombres ne sont pas composés d'unités de même espèce ; c'est pourquoi, lorsque je prononce 6, cela suppose que les 6 unités sont toutes de même genre, ou de même espèce.

Remarque.

5. On se sert de ce mot *homogene*, lorsqu'on veut exprimer des choses de même espèce, comme des toises sont homogenes à des toises, des boisseaux à des boisseaux, &c.

Corollaire II.

6. Un nombre devient plus grand, lorsqu'on lui ajoute des unités de même espèce, & il devient plus petit, lorsqu'on en ôte des unités de même espèce.

Corollaire III.

7. On peut augmenter un nombre de deux manieres, ou en répétant le même nombre plusieurs fois, comme si l'on veut ajouter 6 une fois, deux fois, trois fois, &c. à lui-même, ou en ajoutant à 6, tel autre nombre que l'on voudra, comme 6 à 8.

Corollaire IV.

8. Il est clair qu'on peut faire le même raisonnement quand il s'agit de diminuer un nombre ; ainsi je puis de 18 ôter 6 une fois, ou plusieurs fois, ou de 18 en ôter un autre nombre, comme 5, 7, &c.

Remarque.

9. Il suit de ces deux derniers Corollaires, qu'il n'y a que quatre Regles, qui sont celles que nous

D'ARITHMÉTIQUE. 3

avons nommées ci-dessus ; car ajoute-t-on deux nombres différens ensemble , c'est l'*Addition* ; ajoute-t-on le même nombre plusieurs fois , c'est la *Multiplication* ; soustrait-on un nombre d'un autre , c'est la *Soustraction* ; mais soustrait-on plusieurs fois le même nombre d'un autre , c'est la *Division*.

DEFINITION III.

10. *Ajouter* , c'est trouver la somme de plusieurs unités semblables. Dans l'*Addition* , on donne les grandeurs particulieres dont on cherche une seule expression qu'on nomme *somme*.

Corollaire.

11. Puisque tout nombre est composé de plusieurs unités semblables (§ 3.), on aura fait l'*Addition* , si on ajoute successivement ces nombres les uns aux autres.

Remarque.

12. Pour faire l'*Addition* , on suppose qu'on sache ajouter les neuf premiers chiffres ensemble , comme 8 & 5 font 13 , 9 & 6 font 15.

DEFINITION IV.

13. *Soustraire* , c'est chercher la différence de deux nombres ; ainsi veut-on soustraire , ou ôter 8 de 10 , il reste 2 , ce reste s'appelle *excès* ou *différence* , ce qui montre que par la *Soustraction* , on trouve un nombre qui joint au plus petit , égale le plus grand , comme 8 avec 2 , qui est la différence , est égal à 10.

Corollaire.

14. Tout nombre étant composé d'unités (§ 3.),

on aura fait la Soustraction, si des unités d'un nombre proposé, on ôte successivement les unités de l'autre nombre donné.

Remarque.

15. La Soustraction suppose aussi qu'on sçache ôter les nombres les uns des autres, comme de 9 ôtez 4, reste 5; & encore de 15 ôtez 7, reste 8; de 18 ôtez 9, reste 9.

D E F I N I T I O N V.

16. *Multiplier*, c'est répéter le même nombre plusieurs fois, ou l'ajouter à lui-même plusieurs fois. Le nombre qu'on veut répéter s'appelle *Multiplie-cande*, & l'autre qui marque le nombre de répétitions s'appelle *Multiplie-cateur*; ce qui résulte de la Multiplication, se nomme *produit*; ainsi si l'on multiplie 8 par 5, le nombre 8 est le multiplie-cande, 5 le multiplie-cateur, & 40 le produit.

Corollaire.

17. La Multiplication n'est, comme l'on voit, qu'une Addition réitérée, mais une certaine quantité de fois déterminée, comme dans l'exemple de la Définition cinquième, quand on multiplie 8 par 5, 8 est réitéré 5 fois, ce qui fait voir que 40 qui est le produit, contient 8 autant de fois que 5 contient 1.

D E F I N I T I O N VI.

18. *Diviser*, c'est chercher combien de fois un nombre est contenu dans un autre; si l'on cherche combien de fois 4 est dans 12, cela s'appelle diviser: il y a trois nombres à distinguer dans la Division, celui qui divise, ou *Diviseur*, celui qui est di-

D'ARITHMETIQUE. 5

visé, ou *Dividende*, & celui qui exprime combien de fois le diviseur est dans le dividende, qui se nomme *Quotient* ou *Exposant* ; c'est celui qu'on cherche.

Corollaire I.

19. La Division n'est autre chose qu'une Soustraction réitérée. Dans la Division on cherche le nombre de fois que le diviseur peut se soustraire du dividende, & c'est ce nombre de fois qu'on nomme *Quotient*, ou *Exposant*.

Corollaire II.

20. On peut donc conclure que le diviseur est contenu dans le dividende autant de fois que l'unité l'est dans le quotient, puisque le diviseur est soustrait du dividende autant de fois que le quotient contient l'unité.

Axiome I.

21. Chaque nombre est égal à lui-même.

Remarque.

22. C'est-à-dire que 6 qui peut venir de la somme de 4 & 2, ou du produit de 2 par 3, ou de 12 divisé par 2, fait toujours le même nombre 6.

Axiome II.

23. Deux choses égales à une troisième, sont égales entre elles, & toutes trois sont égales.

Remarque.

24. C'est-à-dire, si Jean & Jacques sont égaux à Pierre, ces trois personnes seront égales, & Jean & Jacques seront égaux entr'eux.

Axiome III.

25. Si à des choses égales , on ajoute choses égales , les sommes seront égales ; & si à choses inégales , vous ajoutez choses égales , les sommes seront inégales.

Axiome IV.

26. Il faut dire la même chose de la Soustraction.

Axiome V.

27. Si vous multipliez choses égales par choses égales , les produits seront toujours égaux ; mais si vous multipliez choses inégales par choses égales , les produits seront inégaux.

Axiome VI.

28. Il faut raisonner de la même manière pour des grandeurs égales ou inégales, qui sont divisées par grandeurs égales.

Corollaire.

29. Si l'on suppose que deux personnes fassent un Calcul , & qu'aucune des deux ne se soit trompée , elles doivent trouver la même chose.

Axiome VII.

30. Si *A* est plus grand que *B* , il est clair que *A* sera plus grand que toutes les grandeurs qui seront égales à *B*.

Axiome VIII.

31. Un tout est égal à toutes ses parties , & conséquemment plus grand qu'aucune de ses parties.

Hypothèse I.

32. On est convenu dans la Numeration de nombrer par dixaines.

Remarque.

33. Cette maniere de compter est générale, & elle paroît naturelle, parce que nous y sommes accoutumés dès la plus tendre jeunesse; elle doit probablement son origine à l'habitude qu'ont presque tous les hommes, de compter par leurs dix doigts.

Corollaire.

34. Les nombres de la premiere dixaine ont des noms particuliers, comme chacun de ceux qui expriment les autres dixaines; ainsi, un, deux, trois, quatre, &c. sont les noms de la premiere dixaine, & vingt, trente, quarante, sont les noms de la seconde, troisième, quatrième dixaine.

Hypothèse II.

35. Dix fois dix, se nomme cent, dix fois cent se nomme mille, & mille fois mille se nomme un million, &c. on peut ensuite employer les noms de milliars, billions, trillions, quatrillions, ainsi de suite.

Remarque.

36. On emploie ces sortes de noms, ou l'on se sert de ces dénominations, pour éviter l'obscurité, & se donner quelque idée de la quantité que ces nombres expriment

Hypothèse III.

37. On a inventé neuf caracteres tels que 1 2
3 4 5 6 7 8 9, pour signifier les neuf pre-

mieres unités ; & pour pouvoir exprimer ou marquer les dixaines , centaines , mille , &c. on est convenu d'attribuer à ces mêmes figures une valeur qu'on peut appeller valeur locale , c'est-à-dire que le même chiffre étant seul , il n'exprime que de simples unités , & des dixaines lorsqu'il est suivi d'un caractère , & des centaines si pareillement il est accompagné de deux autres figures , &c. L'on est encore convenu que cette figure (0), feroit la marque de la négation , soit des unités , soit des dixaines , soit des centaines , &c. ainsi pour marquer trois cens quarante-cinq , on écrira 345 , & pour marquer trois cens deux , on écrira 302 , où le zero marque la suppression des dixaines,

Problème I.

38. Enoncer en françois un certain nombre de chiffres proposés , c'est-à-dire , assigner à chaque chiffre sa valeur propre.

Règle.

Soit donné le nombre 78432597, il s'agit de le nombrer : partagez les chiffres de trois en trois , en commençant par la droite 78 , 432 , 597. La premiere tranche à droite est celle des unités, la seconde des mille, & la troisième des millions ; on dira donc, soixante & dix-huit millions , quatre cens trente-deux mille , cinq cens quatre-vingt dix-sept ; & dans cet Exemple : 70^{millions} , 402^{mille} , 097^{unités} , soixante & dix millions , quatre cens deux mille , quatre-vingt dix-sept.

Demonstration.

La Demonstration est évidente par les hypothèses établies aux Numéros 32. 35. 37.

Problème II.

39. Ajouter plusieurs nombres proposés.

Règle.

1°. Rangez les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines.

2°. Puis tirez sous ces nombres une ligne pour éviter la confusion,

3°. Commencez par les unités que vous ajouterez toutes ensemble, voyez combien elles contiennent de dixaines que vous retiendrez pour les ajouter avec les dixaines; passez ensuite au rang des dixaines que vous ajouterez pareillement, si dans ces dixaines il y a des centaines vous les retiendrez pour les ajouter aux centaines; ainsi de suite.

Soit proposé l'exemple suivant

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 524 \\ 63 \\ \hline 4165 \end{array}$$

Dites 3 & 4 font 7 & 8 font 15, écrivez 5 sous la ligne au rang des unités, & retenez 1 (^{c'est-à-dire}_{une dixaine}), vous direz ensuite 1 & 6 font 7 & 2 font 9 & 7 font 16 (^{c'est-à-dire}_{16 dixaines.}) vous poserez 6 *dixaines* sous les dixaines, & vous retiendrez 1 ^{centaine}; puis vous direz 1 *centaine* & 5 font 6 & 5 font 11 *centaines*, on écrira sous la ligne 1 *centaine* & l'on retiendra 1 ^{mille}, pour dire enfin 1 & 3 font 4, & on aura quatre mille cent soixante & cinq.

Démonstration.

Il est clair par l'opération que le nombre trouvé contient toutes les unités, toutes les dixaines, toutes

les centaines , &c. du nombre que l'on avoit proposé ; donc il est égal à la somme de tous ces nombres , ce que l'on cherchoit.

Remarque premiere.

40. On doit remarquer que l'on n'écrit jamais au-dessous de la ligne que le chiffre qui excède les dixaines , cela est général pour tous les rangs.

Si la somme d'un des rangs exprime un nombre juste de dixaines , vous poserez un (0) , & vous retienez le nombre de dixaines pour l'ajouter au rang suivant qui est vers la gauche ; par exemple

$$\begin{array}{r} 325 \\ 533 \\ 242 \\ \hline 1100 \end{array}$$

On dira 2 & 3 font 5 & 5 font dix , vous poserez sous la ligne 0 & vous retiendrez (1) que vous ajouterez à 4 , ce qui fait 5 qui ajoutés à 3 font 8 & 2 font dix , on posera (0) & on retiendra (1) que vous ajouterez pareillement aux chiffres du troisième rang ou de la troisième colonne.

Remarque seconde.

41. Il n'y a point de meilleur moyen pour savoir si l'on ne s'est point trompé dans l'operation , (ce qui ne peut arriver que par le défaut d'attention) que de recommencer la regle en comptant de haut en bas , si l'on a commencé de bas en haut ; les autres manieres sont plus propres à jetter dans l'erreur qu'à l'éviter.

Remarque troisième.

42. Les Mathématiciens se servent communément de ce signe $+$ pour marquer que deux choses sont ajoutées ensemble, comme $(3 + 6)$ signifie qu'on ajoute 6 à 3, & on dit que ce caractère $+$ est le signe de l'Addition.

Remarque quatrième.

43. Les nombres proposés ci-dessus s'appellent nombres simples ou incomplexes, parce qu'ils n'ont point de dénomination particulière. Au contraire si ces nombres signifient des grandeurs particulières qui sont censées être divisées en plusieurs parties ou sous-espèces plus petites; on nomme alors ces quantités, nombres complexes; par exemple

25 th	13 ^{l.}	9 ^{d.}
42	17	8
54	18	11
123 th	10 ^{l.}	4 ^{d.}

La livre se divisant en 20 parties qu'on appelle sols, & le sol en 12 parties qu'on nomme deniers, ces nombres sont dits complexes, & ces subdivisions sont arbitraires en soi; elles sont inventées pour l'usage qu'on en fait dans le Commerce. Il en est de même de cet autre exemple qui contient des toises, pieds, pouces. La toise se divise en 6 pieds, le pied en 12 pouces, & le pouce en 12 lignes.

14 ^{toises.}	5 ^{pieds.}	8 ^{pouc.}
25	4	10
9	3	7
50 ^{tois.}	2 ^{pieds.}	1 ^{pouc.}

Pour faire les Additions de cette nature, il faut

commencer par la plus basse espece , c'est-à-dire ; par les deniers dans le premier exemple , & par les pouces dans le second , & l'on retiendra le nombre de sols qui seront contenus dans les deniers , qu'on ajoutera avec les sols , & si les sols valent des livres, on retiendra ces livres pour les ajouter au rang des livres. Il suffit en general de sçavoir le rapport des subdivisions pour opérer facilement.

Problème III.

44. Soustraire un plus petit nombre d'un plus grand.

Regle.

1°. Il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand , avec cette condition , que les unités soient sous les unités , & les dixaines sous les dixaines , &c,

2°. Puis on tirera une ligne sous ces chiffres.

3°. Ensuite on ôtera les unités des unités , les dixaines des dixaines , les centaines des centaines , &c. on écrira les restes sous cette ligne & la Soustraction sera faite.

Soit proposé l'exemple suivant

$$\begin{array}{r} 6845 \\ 3523 \\ \hline 3322 \end{array}$$

On dira de 5 ôtez 3 reste 2 ; de même si de 4 on ôte 2 reste 2 , de 8 ôtez 5 reste 3 , ainsi de suite.

Remarque.

45. Il peut arriver que quelques-uns des chiffres qui soustrayent soient plus grands que ceux dont on soustrait , c'est-à-dire que l'unité ne puisse être ôtée de l'unité , ou la dixaine de la dixaine , &c. il faut

D'ARITHMETIQUE. 13

alors emprunter du chiffre précédent à gauche une unité qui vaudra une dizaine (§ 37.) dans le rang pour lequel on emprunte ; par exemple , soit donné

$$\begin{array}{r} 7462 \\ 5357 \\ \hline 2105 \end{array}$$

On dira que de 2 ôte 7 cela ne se peut , il faut emprunter du chiffre précédent 1 qui vaudra une dizaine dans le rang pour lequel on emprunte (§ 37) on aura donc 12 , dont ôtant 7 , il restera 5 , le chiffre 6 ne vaudra plus que 5 , on continuera en disant : de 5 ôtez 5 reste 0 , qu'il faudra écrire pour conserver le rang aux autres chiffres (§ 37.) c'est-à-dire afin qu'ils soient dans leur place , puis achever comme ci-dessus.

Lorsqu'on fait une Soustraction , on peut rencontrer des zeros comme dans l'exemple proposé ,

$$\begin{array}{r} 50060 \\ 32632 \\ \hline 17428 \end{array}$$

Il faut avoir recours au chiffre positif dont on emprunte une unité ; ainsi on dira de 0 ôtez 2 , cela ne se peut , on prendra donc sur le 6 une unité qui vaut 10 (§ 37.) ; or si de 10 on ôte 2 , reste 8 , ensuite de 5 ôtez 3 , reste 2 ; pour le troisième rang on a le même embarras , à cause du (0) , & comme il n'y a point de chiffre positif qui précède , on a recours au 5 duquel on emprunte 1 qui est (§ 37.) une dizaine de mille , dont on laisse par la pensée 9 dizaines de mille sur le premier zero , & l'autre mille , ou les dix centaines qui restent de cette décomposition , s'attribuent au premier zero ,

ce qui fait que l'on dit, si de 10 on ôte 6 reste 4; puis de 9 ôtez 2 reste 7, & de 4 (car le 5 n'est diminué que d'une unité) ôtez 3, reste 1, & l'opération est finie. Ce sont-là tous les cas qui peuvent se rencontrer dans la Soustraction: on doit voir la raison pour laquelle on dit que le premier zero vaut dix, & les autres neuf, quand il y en a plusieurs de suite.

Démonstration.

Par l'opération on voit que le reste qu'on trouve est la différence des deux nombres donnés, puisqu'on ôte l'unité de l'unité, la dixaine de la dixaine, &c. or le reste de chacune des parties est égal au reste total, & conséquemment ce reste ajouté au nombre qui a soustrait, sera égal au nombre donné.

Remarque.

46. Si donc on vouloit connoître si l'opération est bien faite, l'on ajouteroit (§ 13.) le reste au nombre de dessous, la somme doit être égale au nombre de dessus, ou au plus grand, comme l'on peut voir ci-après.

$$\begin{array}{r}
 89456 \\
 \{ 57638 \} \\
 \hline
 \{ 31818 \} \\
 \hline
 89456
 \end{array}$$

Remarque.

47. On est convenu de ce signe — qu'on nomme le signe *moins*, pour marquer la Soustraction; ainsi pour marquer la différence de 8 & de 5, on écrit de cette manière 8 — 5 égal à 3.

Remarque.

48. La Soustraction composée est celle qui renferme des nombres complexes, comme

De	436 th	13 ^l	8 ^d .
Otez	209	10	9
Reste	227	2 ^l	11 ^d .

On empruntera 1^l qui vaut 12^d, & on dira 12 & 8 font 20 ; or si de 20 on ôte 9 , reste 11 , & le reste à l'ordinaire.

Il suffit de sçavoir le rapport des parties ou sous-especes les unes aux autres, comme on l'a dit (§ 43.) ainsi on aura soin d'emprunter au rang des livres, pour les sols, s'il est nécessaire ; on fera le même raisonnement pour toutes sortes de sous-especes, on aura toujours recours à l'espece supérieure quand il sera besoin d'emprunter.

Problème IV.

49. Construire le *Livret*, on l'appelle la Table de Pythagore, c'est-à-dire une Table où les produits des neuf premiers chiffres les uns par les autres soient marqués, & cela pour faire la multiplication avec plus de facilité.

Résolution.

1°. On fera un quarré dont on partagera chaque côté en 9 parties égales, & par chaque division, on tirera des lignes parallèles à chacun des côtés, ce qui réduira le quarré en plusieurs autres petits quarrés.

2°. Dans la premiere tranche horizontale on placera les 9 premiers chiffres, ainsi que dans la tranche perpendiculaire.

3°. Puis dans la seconde tranche perpendiculaire ; on ajoutera à son premier chiffre le nombre 2 , ce qui fera 4 , & à ce même 4 on ajoutera pareillement 2 , on aura 6 , ainsi de suite ; à la troisième tranche , on ajoutera au premier chiffre , le nombre 3 , ainsi de suite , & aux autres tranches , le nombre 4 , 5 , 6 , 7 , &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Remarque.

50. Il est à propos de s'exercer à apprendre cette Table par cœur , on en calcule plus promptement ; il faut du moins l'avoir devant soi lorsqu'on multiplie , jusqu'à ce qu'elle soit devenue familière.

D'ARITHMETIQUE. 17.

2°. Tirez une ligne droite sous les deux nombres.

3°. Ensuite multipliez (à l'aide du Livret) tous les chiffres du Multiplicande par chaque chiffre du Multiplicateur , en observant de reculer toujours d'un rang vers la gauche les produits qui résultent de la multiplication de chaque chiffre du Multiplicateur , afin que les dixaines soient placées sous les dixaines , & les centaines sous les centaines , &c.

4°. Puis on ajoutera tous ces produits particuliers , & leur somme sera le produit cherché.

Soit donné cet Exemple

$$\begin{array}{r}
 \phantom{\text{à multiplier par}} 38476 \\
 \text{à multiplier par} 35 \\
 \hline
 \text{Premier Produit} 192380 \\
 \text{Second Produit} 115428 \\
 \hline
 \text{Produit total} 1346660
 \end{array}$$

Vous direz cinq fois 6 font 30 , mettez 0 , & retenez 3 ; dites ensuite cinq fois 7 font 35 & 3 que vous avez retenu font 38 , posez 8 & retenez 3 ; vous continuerez jusqu'au dernier rang de cette maniere , ce qui vous donnera le premier Produit. Vous passerez après au second chiffre 3 du Multiplicateur , en disant : trois fois 6 font 18 , on posera 8 , mais en le reculant d'un chiffre , car ce sont des dixaines ; vous multiplierez tous les chiffres du Multiplicande par ce chiffre 3 du Multiplicateur , & vous aurez le second Produit.

Enfin on fera l'addition de ces deux produits , & la somme qui en résultera sera le Produit total.

Demonstration.

Il est évident que le premier Produit contient autant de fois le Multiplicande , que le premier chif-

fre du Multiplicateur contient d'unités, ou le Multiplicande est répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier chiffre du Multiplicateur ; c'est le même raisonnement pour le second chiffre du Multiplicateur. Il s'ensuit donc que tout le Multiplicande est multiplié par tout le Multiplicateur, ou répété autant de fois qu'il y a d'unités dans tout le Multiplicateur ; ce qui étoit proposé.

Remarque.

§ 2. Si les nombres donnés sont accompagnés de zero, comme

$$\begin{array}{r} \text{à multiplier par } 200 \\ \begin{array}{r} 386 \\ \hline 77200 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4750 \\ 300 \\ \hline 1425000 \end{array}$$

On multipliera les chiffres positifs les uns par les autres, & l'on ajoutera au produit tous les zeros ; cette remarque dépend de la progression décimale ; car un chiffre vaut dix fois plus en lui ajoutant un zero, & cent fois plus en mettant après lui deux zeros ; ainsi de suite.

On est convenu de ce signe \times pour marquer que deux chiffres sont multipliés l'un par l'autre ; ainsi 3×4 signifie que 3 est multiplié par 4. On a inventé cet autre signe $=$ pour marquer l'égalité qu'il y a entre deux quantités, ainsi $5 + 3 = 8$, signifie que cinq plus trois est égal à huit.

Problème VI.

§ 3. Diviser un nombre donné par un autre.

Règle.

I. CAS. Si le Diviseur n'a qu'un seul caractère.

1°. On fera à côté du Dividende un petit arc.

D'ARITHMETIQUE. 19

qu'on traversera d'une ligne droite sous laquelle on placera le Diviseur, puis on verra combien ce Diviseur est contenu de fois dans le premier chiffre du Dividende, & l'on posera le nombre de fois au-dessus de la petite ligne.

2°. On multipliera ce Quotient par le Diviseur, & on ôtera le produit du chiffre du Dividende, & s'il y a quelque reste, on l'écrira au-dessous.

3°. On abaissera à côté de ce reste le chiffre suivant du Dividende, & l'on cherchera de nouveau combien le Diviseur y est contenu de fois, & on l'écrira à la suite du chiffre du Quotient.

Si l'on continue de cette même manière pour tous les chiffres du Dividende, on aura le Quotient. Cela va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Soit donné le Nombre 7854 à diviser par 3.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividende } 7854 \left\{ \begin{array}{l} 2618 \text{ Quotient.} \\ \hline 3 \text{ Diviseur.} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r} 18 \\ 5 \\ 24 \end{array}
 \end{array}$$

Dites, en 7 combien de fois 3, on trouve 2, mettez 2 au Quotient; multipliez 2 par 3, on aura 6 qui ôtés de 7 il reste 1; on abaissera le chiffre 8 à côté de 1, ce qui fait 18, puis on recommence en disant: en 18 combien de fois 3, on trouve 6, on mettra 6 au quotient, si l'on multiplie 6 par 3, & qu'on soustraye des chiffres du Dividende, on trouve qu'il ne reste rien; on abaissera le 5 qui est le chiffre suivant, & on dira de même, en 5 combien de fois 3, on trouve 1 qu'on pose au quotient, si l'on multiplie & qu'on soustraye, il restera 2, à côté duquel on abaissera le 4 qui est au Dividende, ce qui fait 24, dans lequel nombre 3 est contenu

Bij

8 fois , qu'on met au Quotient , & comme il n'y a plus de chiffres au Dividende , l'on a trouvé tout le Quotient.

Remarque.

54. Si le premier chiffre du Dividende est plus petit que le Diviseur , il faut alors prendre deux chiffres en commençant l'opération.

Démonstration.

Le tout étant égal à toutes ses parties prises ensemble , il est clair que dans cette opération on cherche combien de fois le Diviseur est contenu dans les mille , les centaines , les dixaines , &c. & qu'on marque au Quotient cette quantité de fois. On trouve donc nécessairement ce qu'on vouloit chercher , puisque l'objet de la Division est d'exprimer combien de fois un Nombre est contenu dans un autre.

II. CAS. Si le Diviseur est composé de plusieurs chiffres ou caractères.

Règle.

1°. On écrira le Diviseur comme dans le premier Cas ; puis on prendra autant de chiffres au dividende , qu'il y en a dans le Diviseur.

2°. On cherchera comme dans le premier cas , combien le premier caractère du Diviseur est contenu de fois dans le premier chiffre du Dividende , & on le posera au Quotient.

3°. On multipliera ce Quotient par tous les chiffres du Diviseur , & l'on soustraira le produit des chiffres du Dividende , si ce produit n'est pas trop grand , & on écrira le reste au-dessous.

4°. Si la Soustraction ne peut se faire , on di-

D' A R I T H M E T I Q U E. 21

minuera ce Quotient d'une unité ou de plusieurs, jusqu'à ce que le produit de ce Quotient par le Diviseur puisse être soustrait des chiffres qu'on a pris pour être le Dividende.

5°. On écrira enfin le reste s'il y en a un, auquel on joindra une nouvelle figure du Dividende qu'on abaissera, & on recommencera toujours la même opération, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la dernière figure du Dividende.

6°. Veut-on examiner si l'on a bien opéré, il n'y aura qu'à multiplier tout le Quotient par le Diviseur, on doit avoir un produit égal au Dividende.

Soit l'Exemple proposé.

7856	{	245	245 <i>Preuve.</i>
64	{	32	32
145			490
128			735
176			7840
160			16 <i>Reste.</i>
<i>Reste</i> 16			7856 <i>Produit total égal au Dividende.</i>

Prenez d'abord 78, & dites en 7 combien de fois 3, on trouve 2, écrivez 2 au Quotient, puis multipliez 32 par 2, ce qui fait 64 que vous soustrairez de 78, il reste 14; vous abaisseriez 5, & dites en 14 combien de fois 3, on trouve 4 que vous poserez au Quotient, ensuite vous multipliez 32 par 4, & soustrairez le produit 128 de 145, il restera 17 auquel reste on joindra 6, ce qui fait 176; on recommencera pareillement en disant, dans 17 combien de fois 3, on trouve 5; enfin on multipliera 5 par 32, & vous soustrairez le produit 160 de 176, on aura pour reste 16, & l'o-

opération sera finie, c'est-à-dire, que le Quotient 245 exprime combien de fois le Diviseur 32 est contenu dans 7856; si donc on multiplie 245 par 32, & qu'au produit 7840 on ajoute le reste 16, il viendra 7856.

Remarque.

55. On peut remarquer que pour arriver au but qu'on se propose dans la Division, on sépare les chiffres du Dividende en plusieurs membres ou parties, & qu'on cherche combien le Diviseur est contenu dans chacun de ces membres, ce qui facilite la recherche du Quotient. C'est le sens de toutes les Regles, de faire par parties ce qu'on ne peut faire tout d'un coup.

Soit encore l'Exemple suivant.

$$\begin{array}{r}
 6406402 \left\{ \begin{array}{l} 200200 \\ \hline 32 \end{array} \right. \\
 \underline{0} \\
 64 \\
 \underline{02}
 \end{array}$$

On choisit d'abord 64, & on dit : 3 est dans 6 deux fois, il faut mettre 2 au Quotient, il ne reste rien, on abaisse 0; mais 3 n'est point dans 0, il faut mettre un zéro au quotient, afin que le chiffre 2 soit

Remarque.

56. On appercevra la raison pour laquelle on est obligé de mettre un zero, lorsqu'on voit que le Diviseur n'est point dans un des chiffres du Dividende, si l'on se rappelle que chaque chiffre augmente celui qui le précède de dix fois; il faut donc augmenter le Quotient de dix fois, ce qui se fait en mettant un zero; d'où il est aisé de conclure que le nombre des caracteres du Quotient est égal à celui du Dividende, ne comptant que pour un le nombre de ceux qui sont nécessaires pour la premiere opération.

Démonstration.

Elle est la même que celle du premier Cas; il est vrai que celle-ci, qu'on appelle composée, est sujette au tâtonnement, mais ce tâtonnement se trouve rectifié par la multiplication du Quotient par le Diviseur, lequel produit est comparé aux chiffres qu'on a choisis pour être le Dividende.

DEFINITION VII.

57. Si l'on compare deux Nombres (4 & 12) en cherchant par la Soustraction quelle est leur différence, sçavoir 8, ce rapport est nommé *Rapport Arithmétique*; mais si l'on cherche combien l'un est contenu dans l'autre, comme 4 est dans 12, c'est-à-dire (3), ce que l'on connoît par la Division; on nomme cette maniere de considérer les grandeurs *Raison Géométrique*, ou simplement *Rapport*: le premier se connoît donc par la Soustraction, & le second par la Division, & le Quotient est ce qu'on appelle l'*Exposant* de la raison géométrique.

D E F I N I T I O N VIII.

58. On dit que deux ou plusieurs rapports arithmétiques sont semblables, comme (3, 5 & 6, 8) lorsque la différence est la même, & que des rapports géométriques sont semblables, lorsque les exposans sont les mêmes, comme (3, 12 & 5, 20) cette similitude de rapports est appelée proportion. La première, *Proportion Arithmétique* ; la seconde, *Proportion Géométrique*.

Remarque.

59. On écrit ainsi les nombres qui sont en proportion Arithmétique (5. 3 :: 8. 6, ou $5 - 3 = 8 - 6$) & on écrit de cette manière ceux qui sont en proportion Géométrique (12. 3 :: 20. 5.) Voici comme on doit prononcer la première, 5 surpasse 3 comme 8 surpasse 6, & la seconde, en disant : 12 contient 3 autant de fois que 20 contient 5. Il est encore fort ordinaire de marquer la proportion géométrique de cette manière $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$, ce qui signifie que douze divisé par trois, est égal à vingt divisé par cinq. Cette petite ligne tirée entre les deux nombres indique la division.

D E F I N I T I O N IX.

60. Quelquefois le second terme de la proportion occupe encore la place du troisième terme, comme ici 5. 8 :: 8. 11, & alors le terme 8 est appelé moyen proportionnel arithmétique ; voici comme on marque cette proportion, qu'on nomme proportion continue :: 5. 8. 11. Si la proportion est géométrique, on écrit 3. 6 :: 6. 12, ou :: 3. 6. 12. & l'on dit que 6 est moyen proportionnel géométrique.

DEFINITION X.

61. Une suite de nombres qui sont en proportion, soit Arithmétique, soit Géométrique, est nommée Progression; ainsi $\div 3. 6. 9. 12. 15. 18$ &c. est une Progression Arithmétique, & $\div 3. 6. 12. 24. 48. 96.$ est une Progression Géométrique.

Axiomes.

62. Deux raisons égales à une troisième sont égales entre elles, comme 1. 4 :: 3. 12.

De même 1. 4 :: 5. 20.

Donc 3. 12 :: 5. 20.

Théorème I.

63. Si deux nombres (3 & 6) sont multipliés par un même nombre comme (4) les produits (12 & 24) sont en même raison que les nombres qui sont multipliés.

Démonstration.

Lorsqu'on multiplie 3 par 4, on a 1. 4 :: 3. 12, (§ 17.) & multipliant 6 par 4, on a 1. 4 :: 6. 24; d'où il suit (par l'axiome 62.) que 3. 6 :: 12. 24.

Corollaire.

64. Il suit de cette Démonstration que si l'on divise deux nombres par un même nombre, les quotiens sont en même raison que les grandeurs à diviser; car il est clair que la Division rétablit les grandeurs comme elles étoient avant la Multiplication, mais on peut le démontrer par le principe énoncé à l'article (20.) $12. \frac{12}{4} = 3 :: 4. 1.$

De même $24. \frac{24}{4} = 6 :: 4. 1.$

Donc 12. 24 :: 3. 6.

D E F I N I T I O N X I.

65. On nomme *Fraction* une quantité qui est partagée en plusieurs parties, & dont on en prend une ou plusieurs,

Hypothèse IV.

66. La Fraction se marque par deux nombres mis l'un sur l'autre avec une petite ligne entre deux, comme $\frac{2}{3}$, le chiffre qui est au-dessous de la ligne indique en combien de parties l'entier est partagé, & le chiffre qui est au-dessus indique combien on prend de ces mêmes parties ; ainsi dans cet Exemple on prononcera deux tiers, & dans celui-ci $\frac{3}{4}$, trois quarts, le chiffre supérieur s'appelle *Numérateur*, & l'inférieur *Denominateur*.

La fraction est une division, dont le dividende est plus petit que le diviseur ; ainsi on peut dire que $\frac{2}{3}$ signifie 2 divisé par 3, comme on l'a remarqué article (59.)

Corollaire I.

67. La Fraction est jugée plus ou moins grande par le rapport que le numérateur a au dénominateur, c'est-à-dire par le plus ou le moins de parties que le numérateur contient de celles du dénominateur ; ainsi la fraction $\frac{3}{37}$ est petite, parce que le numérateur 3 ne contient que trois parties de 37 : au contraire la fraction $\frac{2}{5}$ est dite grande, parce que 2 numérateur contient deux parties des cinq qui sont au dénominateur. Si un numérateur est autant de fois contenu dans son dénominateur, qu'un autre numérateur l'est dans son dénominateur, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, on dit alors que les deux fractions sont égales ; les fractions égales forment donc une proportion. Si le numérateur d'une fraction est plus grand que son

dénominateur comme $\frac{11}{14}$, la fraction est plus grande que l'entier ; elle est ici de $\frac{11}{14}$ plus grande, car $\frac{24}{14}$ égale l'entier.

Corollaire II.

68. Il s'ensuit (§. 63. 64.) que le numérateur & le dénominateur d'une fraction comme $\frac{4}{6}$, multipliés ou divisés par un même nombre, sont de nouvelles fractions égales entre elles ; ainsi $\frac{2}{3}$ est égal à la fraction $\frac{4}{6}$, laquelle a été multipliée par 2, & qui donnera $\frac{2}{3}$, si elle est divisée par 2.

Problème VII.

69. Réduire une fraction donnée comme $\frac{20}{11}$, en une autre fraction qui lui soit égale, & dont les termes soient plus petits que ceux de la donnée.

Règle.

On divisera (§ 53.) le numérateur & le dénominateur de la fraction par un même nombre qui les divise sans reste ; les quotiens qui résulteront de cette division donneront une nouvelle fraction qui sera égale à la proposée par l'article (64.) ; ainsi divisant les deux termes de $\frac{20}{11}$ par 4, on aura la fraction $\frac{5}{11}$ égale à la proposée.

Problème VIII.

70. Réduire plusieurs fractions qui ont une dénomination différente à la même dénomination, & qu'elles soient cependant égales aux fractions proposées.

Règle.

L CAS. S'il n'y a que deux fractions, on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre.

II. CAS. S'il y a plusieurs fractions, on multipliera le numérateur & le dénominateur de chaque fraction par le produit des autres dénominateurs.

Dans l'un & dans l'autre cas les fractions seront égales & réduites à la même dénomination (§ 63).

Soit proposé l'Exemple suivant

I. CAS. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 & 3, termes de la première fraction par 5, ce qui donne $\frac{10}{15}$; puis 4 & 5, termes de la seconde, par 3, ce qui donne $\frac{12}{15}$.

II. CAS. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, on multipliera $\frac{2}{3}$ par 24 produit de 4 par 6, qui sont les dénominateurs des autres fractions; on aura $\frac{16}{72}$, puis $\frac{9}{4}$ par 18 produit des autres dénominateurs; enfin $\frac{5}{6}$ par 12, & l'on aura $\frac{16}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$.

Problème IX.

71. Ajouter des fractions.

Regle.

I. CAS. Si les fractions ont les mêmes dénominateurs, il faut ajouter les numérateurs.

II. CAS. Si les fractions proposées ne sont pas réduites à la même dénomination, il faut commencer par les y réduire (§ 70.) puis ajouter seulement les numérateurs pour en faire une seule fraction, & écrire au-dessous le dénominateur commun; par exemple $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ sont égaux à $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, en les réduisant à la même dénomination; puis ajoutant les numérateurs 10 & 12, on aura $\frac{22}{15}$ égal à $1 + \frac{7}{15}$ (§ 67.).

Autre Exemple.

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4} = \frac{48}{72}$, $\frac{12}{72}$, $\frac{54}{72}$, leur somme $\frac{114}{72} = 1 + \frac{42}{72} = 1 + \frac{7}{12}$, parce que $\frac{42}{72}$ peut se réduire à moindres termes par le (§ 69).

Démonstration.

Les dénominateurs étant les mêmes, les fractions sont entre elles comme les numérateurs, donc la somme de ces derniers fera la somme des fractions.

Problème II.

72. Soustraire une fraction d'une autre fraction.

Règle.

I. CAS. Si les fractions ont le même dénominateur, on soustraira le plus petit numérateur du plus grand numérateur, on marquera le reste au-dessous du dénominateur commun.

Veut-on ôter $\frac{4}{6}$ de $\frac{5}{6}$, il reste $\frac{1}{6}$.

II. CAS. Si les fractions proposées n'ont point la même dénomination, il faut les y réduire, & opérer comme dans le premier cas.

Supposons que l'on ait $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, on les réduira à la même dénomination pour avoir $\frac{14}{21}$ & $\frac{9}{21}$, & on dira ensuite 9 de 14 reste 5, & on écrira $\frac{5}{21}$.

Démonstration.

C'est le même raisonnement que dans l'Addition.

Remarque.

73. Une fraction est diminuée ou est partagée en deux, en trois, en quatre parties, en multipliant son dénominateur par 2, par 3, par 4, &c. ainsi $\frac{2}{3}$ est le double de $\frac{2}{6}$, & le triple de $\frac{2}{9}$, & le quadruple de $\frac{2}{12}$: au contraire une fraction est augmentée en augmentant son numérateur ; ainsi $\frac{2}{3}$ n'est que la moitié de $\frac{4}{3}$, &c.

Problème XI.

74. Multiplier une fraction par une autre fraction.

Règle.

Multipliez les numérateurs par les numérateurs & les dénominateurs par les dénominateurs, le produit sera la multiplication des fractions les unes par les autres.

Par exemple $\frac{2}{3}$ à multiplier par $\frac{5}{6}$, est égal à $\frac{10}{18}$ ~~est~~ $\frac{5}{9}$ (§ 69).

De même $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7} = \frac{30}{84}$ Produit des Numérateurs
Produit des Dénominateurs

Démonstration.

Lorsqu'on propose une fraction à multiplier par une autre fraction, c'est improprement qu'on nomme cela Multiplication. Le sens de cette opération est de faire une Réduction ou une Division; c'est donc une idée opposée à celle qu'on a coutume de se former, on a au contraire dessein de trouver une expression plus petite que celle qui est donnée; ainsi lorsqu'on se propose de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{6}$, on cherche les trois septièmes de quatre cinquièmes, c'est-à-dire, à diviser les $\frac{4}{5}$ en septièmes, ce qui se fait en multipliant 5 par 7, ce qui donne 35, lesquels sont réduits en septièmes; mais comme l'on veut en prendre 3 de ces mêmes parties, il faut multiplier 4 par 3, & l'on aura $\frac{12}{35}$ qui seront les trois septièmes de quatre cinquièmes, c'est cependant ce que l'usage a voulu appeller multiplication, parce que pour arriver au but qu'on se propose, il faut multiplier; donc en multipliant selon la règle le numérateur par le numérateur & le dénominateur par le dénominateur, on a résolu ce que l'on demandoit.

Remarque première.

75. Il n'est pas étonnant que le produit d'une fraction par une autre fraction soit moindre que les

fractions proposées ; car , puisque c'est une vraie division , ou une réduction que l'on veut faire , ce n'est point une multiplication ou une augmentation de parties que l'on cherche.

Remarque seconde.

76. On apperçoit clairement qu'ayant une fraction à multiplier par un nombre entier , on doit ne multiplier que le numérateur de la fraction par le nombre entier , comme $\frac{3}{4}$ par 4 ou par 5 $= \frac{3}{1}$ & $\frac{15}{4}$, car on se propose de quadrupler ou de quintupler la fraction , ce qu'on fait en augmentant son numérateur. Il faut multiplier le dénominateur si on veut la diviser comme on l'a démontré dans la remarque (§ 73.)

Problème XII.

77. Diviser une fraction par une autre fraction.

Règle.

Réduisez les deux fractions à la même dénomination (§ 70.) puis on divisera le numérateur de celle qui est regardée comme le dividende , par le numérateur de celle qui est regardée comme le diviseur.

Soit proposé $\frac{3}{4}$ à diviser par $\frac{2}{3}$, on aura par la réduction à même dénomination $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$, il faudra écrire $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$, ce sera le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$.

Démonstration.

On se propose dans la Division de chercher combien une grandeur est contenue dans une autre , à quoi l'on parvient en voyant combien 8 est dans 9 , ou en écrivant $\frac{9}{8}$; car les deux fractions ayant la même dénomination , sont divisées par la même grandeur ; elles sont donc entr'elles (§ 64.) comme 9 à 8 ; donc il suffit de diviser 9 par 8 , donc $\frac{9}{8}$ est le quotient.

Remarque premiere.

78. On dit que pour diviser deux fractions, il faut renverser les termes de la fraction qui sert de diviseur ; puis multiplier le numérateur par le numérateur de l'autre, & pareillement les dénominateurs ; les produits seront le quotient.

Dans l'exemple ci-dessus $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$ on écrirait $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$, puis multipliant selon la regle, on aura $\frac{2}{12}$, ce qui donne le même quotient que l'on a trouvé.

Démonstration de la Remarque.

$\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$ étant réduits à la même dénomination, on aura $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, & en renversant les termes du diviseur, on aura $\frac{2}{12}$, $\frac{12}{8}$, si l'on multiplie les numérateurs & les dénominateurs les uns par les autres, on aura $\frac{2}{9}$; car le terme 12 commun au numérateur de l'une & au dénominateur de l'autre fraction, ne doit point entrer en considération ; puisqu'il multiplie la même grandeur & qu'il la divise ; d'où l'on peut déduire que le quotient d'une fraction par une fraction, est plus grand qu'aucune des fractions proposées ; car en les supposant réduites à la même dénomination, comme $\frac{2}{12}$ & $\frac{8}{12}$, il est clair que le numérateur de l'une, sçavoir 8 qui divise le numérateur de l'autre, sçavoir 9, est toujours moindre que le dénominateur commun qui est 12 ; donc $\frac{2}{9}$ est plus

fraction, ce qui donnera $\frac{2}{3}$, cette Méthode revient donc à celle qui fait renverser les termes du diviseur.

Remarque troisième.

80. On trouve fort souvent dans le Calcul, des nombres entiers seuls, ou avec des fractions, à diviser par des grandeurs entières, jointes pareillement à des fractions.

Comme $11\frac{2}{3}$ à diviser par $2\frac{1}{4}$.

Règle.

1 Réduisez l'entier à la même dénomination que celle de la fraction.

Vous aurez de cette manière deux nouvelles fractions égales aux quantités proposées, & vous ferez la division comme il est dit dans la seconde Remarque.

Soit l'Exemple proposé $11\frac{2}{3}$ à diviser par $2\frac{1}{4}$.

En multipliant 11 par 3 , on aura $\frac{33}{3} = 11$, auxquels si l'on ajoute $\frac{2}{3}$, on a $\frac{35}{3}$; de même 2 multiplié par $4 = \frac{8}{4}$, auxquels joignez $\frac{1}{4}$, la somme est égale à $\frac{11}{4}$; on aura donc $\frac{35}{3}$ à diviser par $\frac{11}{4} = \frac{140}{33}$ suivant la règle précédente, & par réduction $4\frac{2}{3}$.

DEFINITION XII.

81. Si l'on multiplie un nombre quelconque par lui-même comme 5 , en disant: cinq fois cinq font 25 , le produit qui en résulte est appelé quarré; ainsi 36 est le quarré de 6 , 49 le quarré de 7 , & les nombres 5 , 6 , 7 , sont nommés les racines quarrées de 25 , 36 , 49 .

DEFINITION XIII.

82. Des nombres quarrés comme 25, 36, 49, multipliés par les racines quarrées 5, 6, 7, donnent pour nouveaux produits, 125, 216, 343, qu'on appelle nombres cubes, & les nombres 5, 6, 7, sont appellés les racines cubes de ces mêmes nombres.

DEFINITION XIV.

83. Extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est trouver un nombre qui multiplié par lui-même produise le nombre proposé. De même on appelle extraire la racine cube d'un nombre, trouver un nombre qui multiplié deux fois par lui-même, produise le nombre proposé.

Remarque.

84. Pour arriver à faire ces deux opérations, il faut sçavoir par mémoire les Quarrés & les Cubes des neuf premiers chiffres qu'on a placés dans cette Table.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Corollaire 1.

D' A R - I T H M È T I - Q U E. 35
est composé de trois caractères ; donc le quarré de
deux chiffres si petits qu'ils puissent être , sera ex-
primé par trois caractères.

Corollaire III.

87. Les trois plus petits caractères qui puissent
être , sont 100 , & leur quarré , sçavoir 10000 ,
est exprimé par cinq chiffres ; donc le quarré de
deux chiffres quelques grands qu'ils soient , comme
le quarré de 99 , ne contiendra au plus que quatre
chiffres , ou ce qui est la même chose , quatre chif-
fres n'auront pour racines que deux caractères.

Corollaire IV.

88. Il s'ensuit que si un nombre est composé de
trois ou de quatre chiffres , il a nécessairement pour
Racines deux chiffres , & qu'un nombre composé
de cinq & de six chiffres , n'a que trois chiffres pour
sa racine.

Corollaire V.

89. Il suit des Corollaires précédens , qu'en par-
tageant un nombre comme 529 , ou 1859 , cha-
cun en deux tranches ou sections , de cette maniere
5|29 , & 18|59 , le nombre des tranches mar-
quera le nombre de racines , puisque trois chiffres
ou quatre chiffres n'ont pour racine que deux ca-
ractères , & que ce nombre est partagé en deux
tranches.

Ainsi dans 2|63|46 , il y a trois tranches , donc il
y a trois caractères à la racine. De même 76|29|48
aura pour racine trois caractères.

Remarque.

90. On partage les chiffres par tranches de

deux en deux , puisque deux chiffres ont une racine ; mais la dernière tranche ou le dernier rang , peut ne renfermer qu'un chiffre , parce qu'un seul chiffre a une racine ; c'est par cette dernière raison que l'on commence à faire le partage des tranches de droite à gauche , puisque le carré de la première racine est toujours contenu dans cette première tranche , soit qu'elle contienne un seul caractère , soit qu'elle en contienne deux.

DEFINITION XV.

91. Si l'on multiplie un nombre composé de plusieurs chiffres , comme 23 par 23 , pour avoir le carré de 23 , on appellera le premier chiffre 2 , première racine , & le second chiffre 3 , seconde racine ; ainsi de suite.

Théorème II.

92. Lorsqu'on multiplie un nombre composé de deux caractères , comme 23 par 23 , le produit de la multiplication , sçavoir 529 , renferme le carré de la première racine (2) , puis deux fois le produit de cette première racine par la seconde racine (3) , & de plus le carré de cette seconde racine.

Démonstration.

Lorsqu'on multiplie 23
par 23

On a , premierement 69
Secondement , 46

Enfin , le Carré 529

On dit 3 fois 3 font 9 , c'est le carré de la se-

D' A R I T H M E T I Q U E. 37

conde racine , puis 2 fois 3 font 6 , c'est le produit de la seconde racine par la premiere ; on dit derechef 2 fois 3 font 6 , ce qui fait un second produit de la premiere racine par la seconde ; enfin on dit 2 fois 2 font 4 , c'est le quarré de la premiere racine ; donc , &c.

Corollaire.

93. On peut appliquer ce raisonnement à tous les autres nombres , composés non-seulement de deux caracteres , mais de trois , de quatre , &c. où l'on remarquera que quand le nombre est composé de trois chiffres, le quarré de ces trois chiffres contient le quarré de la premiere racine , plus un produit fait du double de la premiere par la seconde, plus le quarré de la seconde ; plus un second produit fait du double des deux premieres racines par la troisiéme, plus le quarré de la troisiéme.

Si le nombre a quatre chiffres pour sa racine , il arrive que son quarré contient tous les produits qui appartiennent à celui qui n'en a que trois, & il contiendra de plus un produit fait du double des trois premieres racines par la quatriéme , & le quarré de cette quatriéme , ainsi de suite.

Problème XIII.

94. Extraire la racine quarrée d'un nombre donné,

Regle.

1°. Partagez par tranches les chiffres proposés de deux en deux , en commençant par la droite , ce qui vous fera connoître le nombre des racines, & faites un petit arc à côté , comme dans la Division.

2°. Cherchez (à l'aide de la Table) la racine

quarrée des chiffres contenus dans la première section qui est à gauche, & vous poserez cette première racine à part.

3°. Soustrayez le quarré de cette racine des chiffres de la première tranche, & écrivez le reste.

4°. Joignez à ce reste (s'il y en a), les chiffres de la seconde tranche qui doivent servir de dividende.

5°. Doublez la racine que vous avez trouvée, & divisez par le double de cette racine ces mêmes chiffres qui doivent servir de Dividende, & le quotient qui en viendra sera la seconde racine que vous marquerez à côté de la première.

6°. Marquez ce qui reste, puis vous abaisserez à côté de ce reste la figure suivante de la même tranche, & ôtez de ces chiffres le quarré de la seconde racine, vous aurez fini l'opération, & vous aurez trouvé la racine quarrée du nombre proposé, s'il ne contient que deux racines.

E X E M P L E.

Soit proposé 6789 dont il faut trouver la racine quarrée.

	$\begin{array}{r} 67 \overline{) 89} \\ \underline{64} \\ 38 \\ \underline{32} \\ 69 \\ \underline{64} \\ 59 \end{array}$	<p>82 Racines.</p> <p>16 double de 8 qui est la première racine.</p>	<p><i>Preuve</i></p> $\begin{array}{r} 82 \\ 82 \\ \hline 164 \\ 656 \\ \hline \text{Reste...} 65 \\ \hline 6789 \end{array}$
<p>Quarré de 8 = 64</p> <p>16 x 2 = 32</p> <p>Quarré de 2 = 4</p> <p style="text-align: center;"><u>Reste 65</u></p>			

Les tranches étant faites, je vois que le nombre proposé a deux racines (Corol. 3.) je dis ensuite le

plus grand quarré contenu dans 67 est 64, dont la racine est 8, je pose 8 à la racine (par l'Article 2 de la Regie), je soustrais (Art. 3.) le quarré de 8, qui est 64, de 67, & il me reste 3, auquel je joins (Art. 4.) le chiffre 8 de la seconde tranche, & cela fait 38; je diviserai (Art. 5.) 38 par le double de la racine déjà trouvée, qui est 16, & le quotient 2 est la seconde racine; il me reste 6, à côté duquel j'abaisserai 9, & j'ôterai (Art. 6.) le quarré 4 de 69, il me restera 65, parce que le nombre proposé n'est pas exactement quarré.

Demonstration.

Par l'opération il est aisé de voir qu'on ôte du nombre quarré tous les produits dont il est composé, sçavoir le quarré de la premiere racine, plus un produit fait du double de la premiere par la seconde, & le quarré de la seconde, donc cette opération fait trouver la racine.

Remarque premiere.

95. Si l'on multiplie cette racine quarrée par elle-même, on aura le nombre proposé s'il est exactement quarré, & s'il ne l'est pas, on ajoutera à ce produit les chiffres qui sont restés.

Remarque seconde.

96. Si le nombre a plusieurs racines, il faut doubler les racines trouvées qui serviront de diviseur, puis ôter le quarré de cette nouvelle racine; c'est la formule générale. S'il arrive que quelques-unes des tranches ne donnent point de chiffres positifs pour racines, on mettra un zero à la racine, & on passera à la tranche suivante.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBE.

Remarque.

97. On peut voir dans la Table des Cubes, que le cube de 2, de 3, de 9, sont exprimés, le premier par un seul chiffre, sçavoir 8; le second, par deux chiffres, sçavoir 27, le troisième, par trois chiffres, sçavoir 729.

Corollaire I.

98. Il s'ensuit donc qu'un nombre d'un seul caractère ou de deux, ou de trois, n'a pour racine qu'un seul chiffre, mais au contraire quatre caractères ont nécessairement deux racines, puisque 1000 est le cube de 10, qui est le nombre qui contient les deux plus petits caractères possibles.

Corollaire II.

99. En suivant le même raisonnement, on verroit qu'un nombre composé de cinq & de six chiffres a deux racines.

Corollaire III.

100. Un nombre étant proposé pour en extraire la racine, il faudra le partager par tranches de trois en trois, en commençant de gauche à droite, & il y aura autant de racines que de tranches; il est clair encore que la dernière tranche pourra ne contenir que deux, ou un seul chiffre.

Théorème III.

101. Lorsqu'on multiplie cubiquement un nombre composé de deux caractères comme 23, le

D'ARITHMETIQUE. 41

nombre cube qui est 12167, contient le cube de la première racine, plus un produit fait du triple du quarré de cette première racine par la seconde, plus un autre produit fait du triple de la première racine par le quarré de la seconde, plus le cube de la seconde.

Démonstration.

Soit le nombre 23 multiplié deux fois par lui-même, suivant la Méthode ordinaire,

$$\begin{array}{r}
 \text{En multipliant} \dots 23 \\
 \text{par} \dots 23 \\
 \hline
 \text{on a d'abord} \dots 69 \\
 \text{puis} \dots 46 \\
 \hline
 \text{enfin le Quarré} \dots 529 \\
 \text{Multipliant ce Quarré par} \dots 23 \\
 \hline
 \text{on a d'abord} \dots 1587 \\
 \text{puis} \dots 1058 \\
 \hline
 \text{Enfin le Cube} \dots 12167
 \end{array}$$

Le nombre 12167 est donc le Cube de 23.

Mais en suivant l'énoncé du Théorème, prenez

$$\begin{array}{r}
 1^\circ. \text{ Le cube de } 2, \text{ qui est} \dots 8 \\
 2^\circ. \text{ Le triple du quarré de } 2, \text{ \& le} \\
 \text{multipliez par } 3, \text{ pour avoir} \dots 36 \\
 3^\circ. \text{ Le triple de } 2 \text{ par le quarré de} \\
 3, \text{ pour avoir} \dots 54 \\
 4^\circ. \text{ Le Cube de } 3, \text{ pour avoir} \dots 27 \\
 \hline
 12167
 \end{array}$$

Si l'on ajoute tous ces différens produits, on aura encore le même nombre que ci-dessus qui étoit le cube de 23 ; donc un nombre cube qui a deux

racines, contient ce qui a été énoncé dans le Théorème. Il faut arranger ces différens produits dans le rang qu'il leur convient pour les ajouter, & avoir le produit total.

Problème XIV.

102. Extraire la Racine cube d'un nombre donné.

Règle.

1°. Partagez par tranches les chiffres de trois en trois, en commençant de droite à gauche, ce qui vous fera connoître le nombre de racines.

2°. Cherchez à l'aide de la Table la racine cube des chiffres contenus dans la première tranche, & vous poserez cette première racine à part.

3°. Soustrayez le cube de cette racine des chiffres de la première tranche.

4°. Abaissez à côté de ce reste (s'il y en a) le premier chiffre de la seconde tranche.

5°. Triplez le carré de la racine que vous avez trouvé, pour être le diviseur des chiffres abaissés, & le quotient sera la seconde racine que vous poserez à la suite de la première.

6°. Vous abaisseriez la seconde figure de la tranche à côté de ce qui est resté après cette division, vous en ôterez un produit qui sera fait du triple de la première par le carré de la seconde, & vous

		69 Racines.	<i>Preuve.</i>
	328 589		69
Cube de 6 =	216	108 = 36 × 3	69
	1125	triple du quarré	621
108 × 9 =	972	de la 1 ^{re} . racine.	414
	1538		4761
18 × 81 =	1458	triple de la 1 ^{re} .	69
	809	racine multiplié	42849
Cube de 9 =	...729	par le quarré de	28566
	Reste 80	la seconde.	Reste....80
			328589

Les tranches étant faites, je vois que le nombre proposé a deux racines (*Art. 1.*), je dis ensuite le plus grand cube contenu dans 328 est 216, dont la racine cube est 6 que je pose à la racine (*Art. 2.*) j'ôte 216 de 328, il reste 112 à côté duquel j'abaisse la figure 5, ce qui donne 1125; je divise (*Art. 3.*) 1125 par 108 qui est le triple du quarré de 6, & j'ai au quotient 9 qui est la seconde racine (*Art. 5.*). Je soustrais 9 fois 108, sçavoir 972 de 1125, il reste 153, à côté duquel (*Art. 6.*) j'abaisse la figure 8, ce qui donne 1538 dont j'ôte 1458 égal au triple de la premiere racine multiplié par le quarré de la seconde, sçavoir $18 \times 81 = 1458$, & il reste 80, à côté duquel j'abaisse 9 qui est le dernier chiffre de la tranche, & j'ôte le cube de 9 sçavoir 729 de 809, le reste est 80, & l'opération est finie, l'on a donc 69 pour racine cube, en sorte que multipliant cubiquement 69, & y ajoutant le reste 80, on aura le nombre proposé.

Démonstration.

On ôte par l'extraction tous les produits qui sont

entrés dans le produit de la puissance, comme il a été démontré au Théorème (101.) donc, &c.

Remarque.

103. Quand il y a plusieurs tranches, on continue en considérant les deux premières racines, comme si elles n'en faisoient qu'une.

S'il arrive que quelques-unes des tranches ne donnent point des chiffres positifs pour racines, on mettra un zero à la racine, & on passera à la tranche suivante.

Théorème IV.

104. Dans la proportion géométrique le produit du premier terme par le quatrième, est toujours égal au produit du second par le troisième.

Soit l'Exemple suivant $3. 6 :: 4. 8.$

On voit que 3×8 produit des extrêmes $= 24$

Et que 6×4 produit des moyens $= 24$

Il en est de même dans tout autre exemple dont les termes sont en proportion géométrique.

Démonstration.

Dans l'Exemple proposé le second terme de la proportion est égal à l'exposant de la raison multiplié par le premier terme, & le quatrième terme est égal au même exposant multiplié par le troisième, c'est-à-dire, $3.$ étant à $6 ::$ comme $4.$ est à 8 , on peut dire $3.$ est à $2 \times 3 :: 4.$ est à 2×4 ; or on voit qu'en multipliant les extrêmes les uns par les autres, sçavoir $3 \times 2 \times 4$, & les moyens les uns par les autres, sçavoir $2 \times 3 \times 4$, ce sont toujours les mêmes grandeurs qui sont multipliées; donc on doit avoir le même produit.

Si la proportion est ainsi $6. 3 :: 8. 4$; on peut la changer de cette manière, $2 \times 3. 3 :: 2 \times 4. 4$, on fera le même raisonnement; donc, &c.

Corollaire I.

105. Si trois nombres sont en proportion continue, comme $\div 4, 8, 16$, le carré du moyen terme 8 sera égal au produit des extrêmes; car on a la proportion $4. 8 :: 8. 16$; donc (§. 104.) $8 \times 8 = 4 \times 16 = 64$.

Corollaire II.

106. Le produit de deux nombres comme 2×16 étant égal au produit de deux autres, comme 4×8 ils pourront faire les moyens ou les extrêmes d'une proportion; car ces quatre nombres ainsi rangés formeront une proportion dans laquelle le produit des extrêmes sera égal au produit des moyens, c'est la proposition inverse du Théorème IV.

Théorème V.

107. Si quatre nombres sont en proportion géométrique, ils y seront encore quoique l'on dérange les termes des quatre manières suivantes.

Soit la proportion $6. 2 :: 9. 3$.

1^{re}. manière

nommée

$6. 9 :: 2. 3$. *alternando.*

2^e. $2. 6 :: 3. 9$. *invertendo.*

3^e. $6 - 2. 2 :: 9 - 3. 3$. *abstrahendo.*

4^e. $6 + 2. 2 :: 9 + 3. 3$. *addendo.*

Démonstration.

Dans le premier changement les moyens & les extrêmes restent les mêmes. Dans le second, les moyens deviennent extrêmes, & dans l'un & dans l'autre cas, ce sont deux grandeurs dont les produits sont par l'hypothèse, égaux aux produits de

deux autres; donc elles sont proportionnelles (106)
 Dans le troisième & dans le quatrième, on ajoute, ou
 soustrait des grandeurs qui sont en même raison;
 donc les termes sont toujours en proportion (62).

Problème XV.

108. Entre deux nombres donnés (8 & 72.)
 trouver un moyen proportionnel géométrique.

Règle.

1°. Multipliez les deux nombres donnés l'un par
 l'autre.

2°. Du produit 576, tirez-en la racine quarrée
 (§ 94.) on aura 24 qui sera le moyen proportion-
 nel cherché (§ 104.)

Problème XVI.

109. Trois nombres étant donnés (3, 12, 5.)
 trouver un quatrième proportionnel.

Règle.

Multipliez le second (12) par le troisième (5);
 & divisez le produit par le premier (3), le quotient
 sera le quatrième terme proportionnel.

Deux nombres étant proposés comme 3 & 12,
 & qu'on veuille trouver un troisième proportionnel,
 faites la proportion 3. 12 :: 12 est au quatrième
 terme; vous multiplierez 12 par 12, & vous di-
 viserez le produit par le premier terme (3), vous
 aurez le troisième proportionnel = 48.

Démonstration.

Lorsqu'on cherche un quatrième proportionnel,
 on veut trouver un nombre, qui multiplié par le

premier (§ 104.) soit égal au produit du second par le troisième ; donc en divisant le produit des moyens par le premier extrême , le quotient fera l'autre extrême ; car le quotient multipliant le diviseur est égal au dividende.

Remarque première.

110. On appelle communément cette opération la *Règle de Trois*, parce qu'elle est composée de trois termes ; elle a un usage considérable dans le Commerce & dans les Sciences. Il est à remarquer qu'on ne doit employer cette règle que lorsque les choses exprimées par les nombres sont semblables , & par conséquent peuvent être proportionnelles , ou peuvent être comparées. Supposons, par exemple, que l'eau d'un vase s'écoule par une ouverture , & qu'en une minute il s'en écoule trois pintes, on demande combien il s'en écoulera en 12 minutes ; il est vrai qu'il y a trois termes de donnés dans cette question , sçavoir (1^{min.} 3^{pintes.} 12^{min.}) ; mais les écoulemens de l'eau ne sont pas proportionnels aux tems , puisque l'eau coulera avec plus de vitesse au commencement dans le même tems , qu'elle ne coulera à la fin. Cette question ne peut donc se résoudre par les trois termes proposés.

Remarque seconde.

111. Il n'en est pas de même pour les choses de commerce , elles sont censées être proportionnelles ; celui qui est payé double , triple , &c. doit faire le double , le triple d'ouvrage , ainsi de suite : dans de pareilles circonstances , ces sortes d'exemples appartiennent donc à la Règle de Trois , parce que le paiement d'un Ouvrier est proportionnel au tems qu'il emploie à travailler ; c'est pourquoi si l'on dit :

3 hommes font 12 toises, combien 10 hommes en feront-ils ; on écrira $3^{\text{hom.}} \cdot 12^{\text{toif.}} :: 10^{\text{hom.}}$, on multipliera 12 par 10, & l'on divisera le produit 120 par 3, & l'on aura 40 toises.

$$120 \left\{ \frac{40}{3} \right.$$

De même si 7 aulnes d'Anvers font 9 aulnes de Paris, combien 18 aulnes d'Anvers ; il faut mettre $7 \cdot 9 :: 18$, & par la même règle, on trouvera $23 \frac{1}{7}$.

$$162 \left\{ \frac{23 \frac{1}{7}}{7} \right.$$

On peut remarquer que 7 est contenu dans 9 ; comme 18 est contenu dans 23, plus $\frac{1}{7}$; ce sont-là les cas où les choses exprimées par les nombres sont proportionnelles.

Remarque troisième.

112. Si les nombres qui sont proposés pour former la proportion, ont des dénominations ou des sous-espèces différentes ; ils n'ont point alors la préparation nécessaire, qui suppose que les termes sont semblables, il faut les réduire à la même dénomination pour employer la Règle de Trois ; par exemple $57^{\text{th}} 4^{\text{f}}$ rapportent 2^{th} , combien $72^{\text{th}} 9^{\text{f}}$, il faut réduire ces termes en sols, en les multipliant par 20, & l'on aura $1144^{\text{f}} \cdot 40^{\text{f}} :: 1449^{\text{f}} \cdot x$, est au nombre de sols cherchés.

Il faudroit en user de même pour l'exemple suivant : $35^{\text{toif.}} 4^{\text{pié.}}$ coutent 152^{th} , combien $10^{\text{toif.}} 3^{\text{pié.}}$, & l'on diroit en multipliant les toises par 6, $214^{\text{pié.}} \cdot 152^{\text{th}} :: 63^{\text{pié.}} \cdot x$, est au nombre de livres cherchées.

Remarque

Remarque quatrième.

113. On parle assez volontiers dans les Livres d'Arithmétique de la Règle de Trois *inverse*, ou *indirecte*, il ne s'agit que d'un arrangement de chiffres ; en voici le fondement : dans les règles de proportion que l'on a ci-devant proposées, il est arrivé que l'arrangement des termes de la question a été tel, que ç'a toujours été le quatrième terme, ou le dernier extrême à trouver : mais on peut proposer quelques questions qui appartiennent aux Règles de proportion, où le terme qu'il faut chercher soit le troisième, c'est pourquoi les trois termes qui seront alors donnés seront le premier, le second & le quatrième ; il faudra donc multiplier (§ 104.) le premier par le quatrième, & diviser le produit par le second, qui est un des moyens.

Soit proposé cet Exemple

12 hommes employent 8 jours à faire un certain ouvrage, combien 16 hommes employeront-ils de tems à faire le même ouvrage.

On rangera de cette manière les termes semblables à côté l'un de l'autre.

$$12^{\text{hom.}}. 16^{\text{hom.}} :: x^{\text{jours.}}. 8^{\text{jours}}$$

$$12 \times 8 = 96 \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 16 \end{array} \right.$$

Puis on multipliera 8 par 12, & l'on divisera le produit 96 par 16, & le quotient 6 fera le nombre de jours, ou le terme cherché ; on aura donc 12. 16 :: 6. 8.

Démonstration.

Les nombres qui expriment les jours doivent

être entre eux comme le nombre des hommes (58).

Or 12 est à 16, comme 6 est à 8, & le nombre cherché doit être contenu dans son semblable 8 de la même manière que 12 est contenu dans son semblable 16; c'est pourquoi l'on parviendra à déterminer si le terme cherché doit être *moyen*, ou *extrême*. 1°. Par la comparaison des termes homogènes qu'on mettra à côté l'un de l'autre; 2°. En considérant si celui qu'on veut trouver doit être plus grand ou plus petit que son homogène, ce qui est facile à découvrir par l'état de la question proposée: ces deux choses examinées, on verra toujours si le terme inconnu doit être avant ou après son semblable, c'est-à-dire, s'il doit être moyen ou extrême, en quoi consiste toute la difficulté si c'en est une.

Si l'on avoit rangé ainsi les termes, ce qui peut se faire, à cause du changement *invertendo*, (107.)
 $16^{\text{hom.}} : 12^{\text{hom.}} :: 8^{\text{ho.}} : x = 6.$

Cette disposition ne change rien à l'état de la question, & il auroit toujours fallu multiplier 12 par 8, & diviser le produit par 16, qui sont les mêmes termes que ceux de l'arrangement précédent, ce qui fait connoître l'inutilité de la Règle de Trois inverse; qu'on peut toujours rendre directe.

Théorème VI.

114. On a dit (§ 63.) que si l'on multiplioit deux nombres par une même quantité, les produits étoient en même raison, ou avoient le même exposant; mais si l'on multiplie deux grandeurs par deux autres, c'est-à-dire l'antécédent d'un des rapports par l'antécédent de l'autre, & le conséquent de l'un par le conséquent de l'autre, les produits qui en résulteront auront entre eux un exposant composé de chacun des rapports.

D'ARITHMÉTIQUE. 51

Soit le rapport de 6 à 2 dont l'exposant est 3
& celui de 36 à 9 dont l'exposant est 4.
les produits 216 & 18 ont pour exposant 12
qui est égal au produit des exposans des rapports
simples.

Demonstration.

Les grandeurs données peuvent s'exprimer ainsi :

$$\begin{array}{l} 6 = 3 \times 2, \quad 2 \\ 36 = 9 \times 4, \quad 9 \end{array}$$

Or les multiplicateurs $3 \times 2 \times 9 \times 4 = 216$
& $2 \times 9 = 18$

ont les nombres 2 & 9 communs, donc en les es-
façant il restera 3 & 4, exposans des rapports
simples dont le produit 12 est égal à l'exposant du
rapport composé.

Application du Théorème, au Règle de Trois composée.

115. On suppose que 5 hommes en 15 jours
font 300 toises d'ouvrage, on demande combien
en feront 18 hommes en 20 jours.

Règle.

1°. Rangez les termes de cette manière ;

$$\begin{array}{ccccc} \text{5 hom.} & & & & \text{18 hom.} \\ \text{en 15 jours} & 300 \text{ toises} & & & \text{en 20 jours} \end{array}$$

2°. Multipliez 5 par 15, & 18 par 20 ; puis
faites une Règle de Trois formée de ces trois termes

$$75. \quad 300 :: 360. x = 1425 + \frac{25}{75} = \frac{2}{3}.$$

3°. Le quatrième terme 1425 & $\frac{2}{3}$ qu'on trouve
après avoir fait la Règle de Trois, indique le nom-
bre de toises que dix-huit hommes feront en vingt
jours.

Dij

Démonstration.

Il est clair qu'il faut avoir égard dans cette question au nombre d'hommes & au nombre de jours, c'est-à-dire, qu'on cherche un nombre de toises qui soit à celui qui est donné en raison composée des termes qui expriment les hommes & les jours ; or c'est à quoi l'on parvient en multipliant

$$\begin{array}{r} 5 \\ \text{par } 15 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \& 18 \\ \text{par } 20 \\ \hline \end{array}$$

Car 75 & 360 qui sont les produits, sont en raison composée des termes qui ont été donnés (§ 114.), & 300 est à 1425 $\frac{1}{3}$, comme 75 est à 360 ; donc ils sont dans le même rapport ; *ce qu'il falloit trouver.*

Remarque.

116. On peut encore dans ces questions ajouter un plus grand nombre de termes, mais la Règle se résout avec la même facilité, en prenant le rapport composé de tous les termes ; car on cherche toujours un terme qui soit à son homogene en raison composée des grandeurs données. Il faut seulement dans ces questions examiner attentivement quels sont les termes qui doivent former le rapport composé, & quelle place doit occuper le terme cherché.

Seconde Application, ou la Règle conjointe.

117. Cette Remarque donne le moyen de résoudre la Règle qu'on appelle dans l'Arithmétique *Règle conjointe*, & qu'il vaudroit mieux nommer *Règle de Trois composée*.

On cherche pareillement dans cette Règle à trouver un terme qui soit à un autre en raison composée de plusieurs grandeurs données.

EXEMPLE.

Si 30th font le prix de 5 cannes de Languedoc.
 Si 9^{cannes} de Langu. = 26 $\frac{1}{4}$ aulnes de Hollande.
 Si 7^{aulnes} de Hollan. = 4 aulnes de Paris.
 Si 5^{aulnes} de Paris = 6 aulnes de Rouen.
 Combien 60th vaudront-elles d'aulnes de Rouen.

Regle.

Multipliez tous les antécédens les uns par les autres, & les conséquens les uns par les autres, vous aurez 9450 & 3150.

Ces deux produits feront les deux premiers termes de la proportion, & mettez 60th pour le troisième terme; puis achevez la Regle de Trois, en cherchant le quatrième proportionnel, vous trouverez 20 aulnes de Rouen pour les 60th.

On rangera donc ainsi les termes

9450. 3150 :: 60th. x = 20 aulnes de Rouen.

Et faisant la Regle, on a

$$3150 \times 60 = 189000 \left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ aulnes de Rouen.} \\ \hline 9450 \end{array} \right. \text{divisé par}$$

Ce n'est comme on voit qu'une Regle de Trois composée; car je cherche un nombre d'aulnes de Rouen qui soit à 60th en raison composée de tous les nombres qui expriment ces différens prix.

Donc il en faut prendre la raison composée, ce qui se fait par la Multiplication des antécédens d'une part, & des conséquens de l'autre. On a sans doute nommé cette Regle *conjointe*, par la liaison que chaque terme a avec le suivant, puisque ce n'est qu'une suite d'égalités dont le premier terme est toujours du même genre que le second terme de l'égalité précédente.

34 É L E M E N S

Lorsqu'on trouve quelque nombre égal de part & d'autre, comme 5 dans l'exemple précédent, on peut l'effacer, & multiplier seulement les termes qui restent, on aura 1890, & 630 dont on peut encore retrancher le zero, & on aura cette proportion 189. 63 :: 60. ~~x~~ 20.

Problème XVI.

118. Diviser un nombre en plusieurs parties proportionnelles à d'autres qui sont donnés.

Règle.

1°. Faites une somme des grandeurs données, dont vous ferez le premier terme d'une proportion.

2°. Vous placerez pour second terme le nombre à diviser, & pour troisième terme une des grandeurs proposées.

3°. Vous ferez autant de Regles de Trois, qu'il y a de grandeurs données.

Supposons qu'on veuille partager 60 en trois parties qui soient entre elles comme 3, 4, 5, on ajoutera 3

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \hline \text{somme} \end{array} \\
 \begin{array}{l} \text{Quatrièmes termes} \\ \text{cherchés.} \end{array} \\
 \begin{array}{l} 12. 60 :: 3. 15 \quad \text{ou } 180 \left\{ \frac{15}{12} \right. \\ \text{\& on dira } 12. 60 :: 4. 20 \quad \text{ou } 240 \left\{ \frac{20}{12} \right. \\ 12. 60 :: 5. 25 \quad \text{ou } 300 \left\{ \frac{25}{12} \right. \end{array}
 \end{array}$$

C'est-à-dire comme la somme est à la grandeur à diviser, ainsi chaque quantité est au quatrième terme qu'on trouve en faisant trois Regles de proportion,

Application, ou Règle de Compagnie simple.

Trois personnes qui se sont associées, ont gagné en commun 60^{fr}, l'une a mis 3^{fr}, l'autre 4^{fr}, & la troisième 5^{fr}, on demande combien elles doivent avoir chacune proportionnellement à leur mise.

Il faut comme ci-dessus, ajouter ensemble toutes les mises dont vous ferez le premier terme de la proportion, le gain sera le second, & chaque mise sera le troisième; puis vous ferez autant de Règles de proportion qu'il y a de mises.

Démonstration.

Les quatrièmes termes 15, 20, 25, sont entre eux comme 3, 4, 5; car le rapport de 3 à 15 est égal à celui de 12 à 60.

De même le rapport de 4 à 20 = 12 à 60; donc (§ 62.) 3 est à 15 :: 4 est à 20, & 15 + 20 + 25 = 60 nombre donné, & qu'il falloit diviser dans les parties proportionnelles.

SECOND EXEMPLE

Pour la Règle de Compagnie simple.

Deux personnes ont mis ensemble 1200^{fr}, l'une a 5000^{fr} de gain, & l'autre 3000^{fr}, on demande quelle a été la mise de chaque personne; on voit que leurs mises particulieres doivent être entre elles comme le gain de chacun, ou comme 5000 est à 3000; donc il faut dire

	gain total	mise totale	gain particulier	mise particul
comme {	8000.	1200 ::	5000. x.	750.
	8000.	1200 ::	3000.	450.

C'est-à-dire comme la somme du gain total est à la mise entiere, ainsi chaque gain est à la mise parti-

culiere , qu'on trouvera en faisant les deux Regles de proportion.

Problème XVIII.

119. Diviser une grandeur en plusieurs parties proportionnelles , & qui soient en raison composée d'autres grandeurs données.

Règle.

1°. Prenez la raison composée des grandeurs données (§ 114.)

2°. Faites une somme de ces raisons composées que vous mettrez pour premier terme d'une proportion.

3°. Placez pour second terme la grandeur à diviser.

4°. Faites autant de Regles de proportion qu'il y a de grandeurs données.

Soit proposé 288 qu'il faut partager en deux parties qui soient entre elles en raison composée de 2 à 5
& de 3 à 6

6	30
---	----

La raison composée est 6 & 30 , dont la somme est 36. On dira

Comme $\left\{ \begin{array}{l} \text{somme. grandeur à diviser} \\ 36. 288 :: 6. x = 48, \text{ ou } 1728 \\ 36. 288 :: 30. x = 240, \text{ ou } 8640 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{48}{36} \\ \frac{240}{36} \end{array} \right.$

*Application du Problème,
ou Regle de Compagnie composée.*

Deux personnes sont convenues qu'en mettant ensemble, l'une 8th pour 2 mois,
l'autre 14th pour 3 mois,

D'ARITHMETIQUE. 57

elles partageroient proportionnellement au tems & à la mise. Elles ont gagné 750^{fr}, on demande le profit de chacune.

Il faut comme ci-dessus multiplier 8 & 14
par 2 par 3
 puis ajoutant $\left. \begin{array}{r} 16 \\ 42 \end{array} \right\} \dots\dots\dots \text{produits}$ $\begin{array}{r} 16 \\ 42 \end{array}$

On dira $\left\{ \begin{array}{l} 58. 750 :: 16. x = 206 \frac{52}{58} \\ 58. 750 :: 42. x = 543 \frac{2}{58} \end{array} \right.$
 somme égale au gain 750^{fr}.

Démonstration.

Les quatrièmes termes qu'on vient de trouver $206 + \frac{52}{58}$, & $543 + \frac{2}{58}$, sont entre eux comme 16 & 42 ; or 16 & 42 sont dans la raison composée $\frac{8}{2} \text{ à } \frac{14}{3}$, c'est-à-dire de la mise à la mise, & du tems au tems ; donc , &c.

SECOND EXEMPLE

Pour la Regle de Compagnie composée.

On suppose que trois personnes se sont associées pour 12 ans , & qu'elles ont gagné 600^{fr}.

Le premier a mis 100^{fr}, & au bout de 6 ans il a retiré 40^{fr}.

Le second a mis 120^{fr}, & au bout de 8 ans il a retiré 60^{fr}.

Le troisième a mis 80^{fr}, & 4 ans après il a encore mis 60^{fr}.

On demande ce que chacun doit avoir de profit à raison de sa mise & de son tems.

Or dans cette question l'on cherche à partager 500^l en trois parties qui soient entre elles en raison composée des tems & des mises ; mais quelle est cette raison composée des tems & des mises ?

Le premier a mis 100^l pour 12 ans, mais il n'a laissé dans la Caisse commune ces 100^l que les six premières années après lesquelles il a retiré 40^l ; donc il ne met plus que 60^l pour les six années suivantes ; donc multipliant la mise par chaque tems, on aura pour les 6 prem. années $100^{\text{l}} \times 6 = 600$
& pour les 6 dern. années $60^{\text{l}} \times 6 = 360$

dont la somme 960

exprimera la mise & le tems du premier.

De même le second a mis 120 liv. pour 12 ans, mais il ne laisse dans la Caisse commune ces 120 liv. que pendant 8 ans, après lesquels il a retiré 60 liv. donc il ne met plus que 60 liv. pour les 4 années suivantes ; donc multipliant la mise par chaque tems, on aura pour les 8 prem. années $120^{\text{l}} \times 8 = 960$
& pour les 4 dern. années $60^{\text{l}} \times 4 = 240$

Somme de la mise & du tems du second 1200

Enfin le troisième a mis 80 liv. pour 12 ans, mais ayant ajouté 60 liv. à cette somme quatre ans après, il avoit en Caisse pendant 4 ans 80^l mais au bout de ce tems ayant ajouté 60^l
il a eu pendant 8 années un fonds de 140^l

Multipliant donc chaque mise par son tems, on aura d'une part $80 \times 4 = 320$
& de l'autre $140 \times 8 = 1120$

lesquels produits étant ajoutés donneront 1440
& ce nombre exprimera la mise & le tems du

D'ARITHMETIQUE. 59

troisième Associé. Presentement qu'on a trouvé ces nombres 960

1200

1440

Sommes des mîles & des tems de chacun.

grandeur à diviser.

produit des tems par la mîle.

Il faut opérer comme il a été dit, en faisant, comme

$$\left\{ \begin{array}{l} 3600. 600 :: 960. x = 160 \\ 3600. 600 :: 1200. x = 200 \\ 3600. 600 :: 1440. x = 240 \end{array} \right.$$

Remarque.

120. Dans toutes les Regles précédentes, & dans celles qui suivent, lorsqu'il arrive que quelques-uns des termes ont des sous-especes, il faut avoir attention de réduire tous ces termes à l'homogenéité, c'est sur cette idée de similitude de rapports qu'est fondée toute cette Théorie. (On a fait la même Remarque à l'article 112).

Regle d'Alliage. Problème XIX.

121. Plusieurs choses de même genre, mais de valeur différentes étant proposées, trouver la quantité qu'il faut de chacune pour composer un nombre de parties qui soient d'une valeur moyenne.

Soient donnés plusieurs lingots d'or,

L'un au titre de 23 Karats, l'autre à 18.

Un troisième à 24, & le quatrième à 15.

On demande la quantité qu'il faut mêler des uns & des autres pour faire de l'or à 20 Karats.

Regle.

1°. Prenez deux à deux la différence de chaque titre à celui qui est moyen, comme de 23 à 20 = 3
celle de 18 à 20 = 2

De même prenez la différence de 24 à 20 = 4
celle de 15 à 20 = 5

2°. Pour marquer la quantité que doit fournir chaque lingot, donnez au plus haut titre la différence du moindre, & réciproquement, donnez au plus bas titre la différence du plus élevé ; la somme de ces quantités marquera le nombre des parties composantes du titre moyen.

	Divers prix multipliés réciproq. par leur diff.	
Multipliez donc	{	$2 \times 23 = 46$
		$3 \times 18 = 54$
De même	{	$4 \times 15 = 60$
		$5 \times 24 = 120$
		prix moy. 20
Leur somme	$14 \times 20 = 280$	Produit égal aux produits particuliers.

Remarquez que l'on a pris suivant la Regle deux parties de l'or au titre de 23, & trois de celui qui est au titre de 18 ; enfin quatre de celui qui est à 15, & cinq de celui qui est à 24.

Remarquez encore que la somme de toutes ces différences multipliées chacune réciproquement par les divers prix, font un tout 280, qui est égal à cette même somme multipliée par le prix moyen 20.

Démonstration.

Il est clair par l'état de la question que les parties inconnues ou composantes, doivent être entre elles comme leur différence au prix moyen, de manière que la partie qui en approche le plus, doit fournir davantage pour le mélange, que celle qui en est plus éloignée.

De plus, les produits partiels qui viennent de la multiplication de chaque quantité par son titre, doivent faire une somme égale au produit de la somme des différences par le prix moyen, comme on l'a vû par l'opération même, donc, &c.

Remarque premiere.

122. On trouve par cette Méthode un nombre déterminé des parties qu'il faut prendre sur chaque lingot, pour faire un tout au prix moyen ; mais si l'on proposoit un mélange d'un nombre à volonté, comme 70 : il est visible que pour parvenir à cette résolution, il faut diviser le nombre proposé en parties proportionnelles aux différences trouvées, ce qui s'acheveroit par plusieurs Regles de Trois.

Comme la somme des différences. $\left\{ \begin{array}{l} 14. 70 :: 2. x = 10 \text{ parties de } 23 \\ 14. 70 :: 4. x = 15 \text{ parties de } 18 \\ 14. 70 :: 5. x = 20 \text{ parties de } 15 \\ 14. 70 :: 3. x = 25 \text{ parties de } 24 \end{array} \right\}$

La Regle consistera donc à dire, comme la somme des différences est au nombre proposé, ainsi chaque différence est à chaque partie du titre donné.

Si les quantités proposées étoient en nombre impair, on en répéteroit une deux fois, en prenant pareillement la différence au prix moyen, & le reste s'acheveroit comme ci-dessus.

Remarque seconde.

123. Ce n'est qu'improprement qu'on peut appeller une Regle d'Alliage, celle où l'on diroit : je veux mélanger 4 pintes de vin à 12 fols, à 6 fols, à 7 fols, on demande combien on doit le vendre ;

$$\begin{array}{rcl} \text{Car } 4 \times 12 & = & 48 \\ 4 \times 6 & = & 24 \\ 4 \times 7 & = & 28 \end{array}$$

Ces douze pintes font 100 fols, qui divisés par 12, nombre des pintes, donnent 8 fols 4 deniers pour chaque pinte.

$$100 \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ f. } 4 \text{ den.} \\ \hline 12 \end{array} \right.$$

Il s'enfuit que dans ce cas , il faut ajouter tous les prix proposés , & diviser leur somme par celle du nombre donné.

Remarque troisième.

124. On ne mettra point les Regles d'une & de deux fausses positions qui n'appartiennent point à l'Arithmétique , elles sont par leur nature du ressort de l'Analyse. Il convient même d'avertir que certaines Regles auxquelles on a donné des noms particuliers, ne sont point des Regles d'une espece ou d'une nature différente de celles qu'on a expliquées dans ce Traité ; ce sont les diverses applications qu'on en a faites dans le Commerce qui ont déterminé à leur donner des noms différens ; mais ce qui en constitue l'essence est le même ; on sçait que les usages de l'Arithmétique sont infinis , & que les noms ne changent point les idées des choses ; ainsi toutes les Regles de l'Arithmétique sont comprises dans ce Traité.

FIN DE L'ARITHMETIQUE.



LE CALCUL

DES

PARTIES DECIMALES.

L'ON a trouvé le moyen d'éviter l'embarras des fractions ordinaires, en se servant du Calcul des Parties Décimales, sur lesquelles on opere comme sur les Nombres entiers. Voici les Principes sur lesquels il est appuyé ; on va expliquer les Regles, puis on donnera les usages qui feront connoître l'utilité de ce Calcul.

DEFINITION.

1. Si l'on divise un tout, ou l'unité ; par exemple, une toise, un pied, &c. en 10 parties égales, chacune sera un dixième de l'unité ; si l'on divise ce dixième en 10 autres parties égales, chacune sera un centième d'unité ; enfin ce centième étant divisé en 10, donnera des millièmes, ainsi de suite. La subdivision est conçue se faire toujours de dix en dix, suivant la Progression décimale.

Une Partie décimale est une fraction qui a pour numérateur un nombre de caracteres quelconques, & dont le dénominateur est toujours l'unité suivie d'un ou de plusieurs zero.

PREMIER PRINCIPE.

2. On peut marquer ainsi une fraction décimale $\frac{3}{10}$, $\frac{14}{100}$; mais il y a une autre maniere, c'est d'exprimer le numérateur seulement, & de sous-entendre le dénominateur ; par exemple, au lieu d'écrire

$\frac{2}{10}$, $\frac{34}{100}$, on écrit .2 pour $\frac{2}{10}$, & .34 pour $\frac{34}{100}$, en mettant un point avant les nombres. De même, si l'on veut exprimer une fraction décimale avec des entiers $13\frac{2}{10}$, & $54\frac{34}{100}$, on écrira ces fractions de cette manière 13.2 , & 54.34 , en séparant par un point les entiers des chiffres qui sont les numérateurs des fractions décimales, & en imaginant pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zero qu'il y a de caracteres au numérateur.

Il faut donc conclure que lorsqu'on trouvera des nombres écrits de cette manière 24.356 ; cela signifie vingt-quatre entiers, plus trois cents cinquante-six millièmes, puisqu'on auroit pu écrire ainsi $24\frac{356}{1000}$.

Si l'on vouloit exprimer un nombre tel que celui-ci $36\frac{2}{1000}$, il faudroit écrire 36.002 , & non pas 36.2 , parce que ces zero qui précèdent le chiffre positif 2, sont placés pour indiquer que la fraction exprime des millièmes, ce que l'on n'auroit pas marqué en écrivant seulement 36.2 qui ne signifie que trente-six deux dixièmes, ou $36\frac{2}{10}$. Le même 28.00003 est égal à $28\frac{3}{100000}$. Les zero mis avant le 3 sont nécessaires pour faire entendre le nombre de zero que l'on doit concevoir au dénominateur, qu'on ne pourroit reconnoître autrement, puisqu'il est sous-entendu.

Il faut encore sçavoir que cette manière d'écrire des décimales 0.23 signifie qu'il n'y a point d'entiers, & que cette fraction est égale à $\frac{23}{100}$, mais on l'écrit ainsi 0.23 pour conserver l'uniformité, & distinguer le rang des entiers d'avec les fractions décimales; cette fraction 0.000048 est donc égale à $\frac{48}{1000000}$, & $1.003 = 1\frac{3}{1000}$.

SECOND PRINCIPLE.

3. Plusieurs Fractions décimales, comme 0.3, 0.54, & 0.008 signifient, comme on vient de le dire $\frac{3}{10}$, $\frac{54}{100}$, & $\frac{8}{1000}$; or ces fractions pourront toujours être réduites facilement à la même dénomination; car $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$. De même $\frac{54}{100} = \frac{540}{1000}$; donc les fractions proposées 0.3, 0.54, & 0.008 pourront s'écrire ainsi, la première 0.300, la seconde 0.540, & la troisième 0.008. Si des nombres entiers sont joints aux fractions décimales, comme 42.03, & 8.0004, ils seront réduits à la même dénomination en écrivant 42.0300, & 8.0004; ces changements sont évidens, puisque les numérateurs & les dénominateurs de chaque fraction sont multipliés par la même grandeur, ils répondent à ce que l'on nomme dans les fractions ordinaires *Réduction à la même dénomination*; cette nouvelle manière de les exprimer est démontrée par le premier Principe.

Problème I.

4. Additionner des fractions décimales;

Regle:

Si elles sont réduites à la même dénomination:

- 1°. Rangez les chiffres comme si c'étoit des grandeurs entières, chacun dans le rang qui leur convient.
- 2°. Faites l'Addition suivant la Regle des Nombres entiers, & la somme sera l'Addition totale.

Soient proposées les Fractions suivantes

E

$$\begin{array}{r}
 42.34 = 42 \frac{34}{100} \\
 105.07 = 105 \frac{7}{100} \\
 19.03 = 19 \frac{3}{100} \\
 0.79 = 0 \frac{79}{100} \\
 \hline
 167.23 = 167 \frac{23}{100}
 \end{array}$$

On dira donc 9 & 3 font 12 & 7 font 19 & 4 font 23.

Posez 3 & retenez 2.

Ensuite 2 & 7 font 9 & 3 font 12.

Posez 2 & retenez 1.

Passiez à l'autre colonne, & dites 1 & 9 font 10 & 5 font 15 & 2 font 17, posez 7 & retenez 1, & achevez le reste comme à l'ordinaire, vous aurez 167.23, qui signifient cent soixante-sept entiers, plus vingt-trois centièmes.

Remarque.

5. Si les Fractions décimales ne sont pas réduites à la même dénomination, il faut en suivant la règle établie dans le second Principe, commencer par les y réduire, avant que de les ajouter.

Soient proposés les nombres entiers avec les fractions décimales qu'il faut ajouter.

$$2.07, 5.3, 0.009, \text{ \& } 1.011.$$

On les réduira à ces expressions qui leur sont égales, en choisissant toujours la plus grande dénomination ou décimale, qui est ici des millièmes.

$$2.07 = 2 \frac{7}{100} = 2.070$$

$$5.3 = 5 \frac{3}{10} = 5.300$$

$$0.009 = 0 \frac{9}{1000} = 0.009$$

$$1.011 = 1 \frac{11}{1000} = 1.011$$

$$\hline 8.390$$

Les fractions ainsi préparées, on fera l'Addition en disant 9 & 1 font 10, je pose 0 & retiens 1, puis passant à la seconde colonne, vous direz 1 de retenu & 7 font 8 & 1 font 9; enfin on continuera de la même manière, & vous trouverez 8.390 pour la somme totale.

Démonstration.

La somme que l'on trouve est celle que l'on cherche, puisque ces fractions n'ont point changé de valeur, & qu'elles ont été réduites à la même dénomination, en les multipliant toutes par le même nombre, comme il a été dit (§. 3).

Problème II.

6. Soustraire des Fractions décimales.

Regle.

- 1°. Si les Fractions données sont réduites à la même dénomination, il faut après les avoir rangées les unes sous les autres, opérer comme dans la Soustraction des nombres entiers.
- 2°. Si elles ne sont pas réduites, commencez par les réduire à la même dénomination, & faites de la même manière que sur les nombres entiers.

Soient proposés 67.001 dont il faut soustraire 6.2, on les réduira à la même dénomination, en écrivant

Ensuite vous ferez la	$67.001 = 67 \frac{1}{1000}$
Soustraction à l'ordi-	$6.200 = 6 \frac{200}{1000}$
naire, & vous trouverez	$\underline{60.801} = 60 \frac{801}{1000}$

Il en est de même de tout autre exemple.

La Démonstration est évidente, & suit des mêmes principes que celle de l'Addition.

Problème III.

7. Multiplier un nombre décimal par un autre.

Règle.

- 1°. Multipliez les nombres, suivant les Règles des nombres entiers.
- 2°. Séparez par un point, (en commençant par la droite du Produit) autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & le Multiplieur, & la Multiplication sera faite.

Soient proposées les nombres avec les fractions décimales.

$$\begin{array}{r}
 34.79 \\
 \times 2.8 \\
 \hline
 27832 \\
 6958 \\
 \hline
 97.412 \quad \text{ou} \quad 97 \frac{412}{1000}
 \end{array}$$

Après avoir multiplié à l'ordinaire, on a séparé par un point les trois derniers chiffres, parce qu'il y avoit deux décimales au Multiplicande, & une au Multiplieur, on verra sur les Exemples qui suivent, la même règle observée.

$$\begin{array}{r}
 35.32 \\
 \times 21.314 \\
 \hline
 14128 \\
 3532 \\
 10596 \\
 3532 \\
 7064 \\
 \hline
 752.81048
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3.9 \\
 \times 6.23 \\
 \hline
 117 \\
 78 \\
 234 \\
 \hline
 24.297
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12.37 \\
 \times 0.20003 \\
 \hline
 3711 \\
 0000 \\
 0000 \\
 0000 \\
 2474 \\
 \hline
 2.474371
 \end{array}$$

Si l'on avoit ces deux fractions décimales à multiplier

$$\begin{array}{r} 0.23 \\ 0.8 \\ \hline \text{on aura } 0.184 \end{array}$$

Remarque.

8. Il peut arriver dans certains cas que la Multiplication étant faite, le Produit ne soit pas exprimé par autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & dans le Multiplicateur ; il faut pour lors mettre avant le Produit autant de zéro qu'il est nécessaire pour égaler le nombre de décimales du Multiplicande & du Multiplicateur.

E X E M P L E S.

$$\begin{array}{r} 3.54 \\ 0.003 \\ \hline 0.01062 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.2 \\ 0.005 \\ \hline 0.0360 \end{array}$$

Démonstration.

Cette Multiplication ne diffère point de la Multiplication des autres fractions dont on multiplie les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs les uns par les autres ; ici les dénominateurs sont sous-entendus, & par conséquent leur produit ; mais pour connoître l'espece de cette dénomination qui est toujours l'unité suivie d'un certain nombre de zéro plus ou moins grand, on sépare du Produit autant de chiffres qu'il y en a au Multiplicande & au Multiplicateur, puisque ce dénominateur contient autant de zéro qu'il y a de décimales au Multiplicande & au Multiplicateur, ce qui fait qu'on doit mettre un ou plusieurs zéro

avant le Produit lorsqu'il ne contient pas la quantité convenable de décimales. Il est aisé d'appercevoir ce raisonnement par un Exemple.

Soit une Fraction décimale à multiplier par une autre,

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ 0,28 \\ \hline \text{on a } 40 \\ 10 \end{array}$$

$$\text{Produit total } 0,140 = \frac{140}{1000}$$

La premiere Fraction décimale est égale à $\frac{5}{10}$, & la seconde à $\frac{28}{100}$, qui multipliées l'une par l'autre, donnent $\frac{140}{1000} = 0,140$ (par le 1^{er} Principe), où l'on voit que le dénominateur est l'unité suivie de trois zero, ou d'un nombre de zero égal à la quantité de chiffres qu'il y a au numérateur, ou qu'il y a de décimales au Multiplicande & au Multiplicateur; donc cette Fraction pourra être exprimée par le seul produit des numérateurs égal à 140, & le dénominateur étant sous-entendu, il faudra écrire $0,140 = \frac{140}{1000}$.

Si ces Fractions sont jointes avec des nombres entiers comme

$$\begin{array}{r} 4,8 = \frac{48}{10} \\ 5,23 = \frac{523}{100} \end{array}$$

c'est-à-dire $\frac{25104}{1000}$ pour produit total qui est égal à 25.104 (par le premier Principe) ; il faut donc retrancher par un point dans le produit, autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le Multiplicande & le Multiplicateur.

Problème IV.

9. Diviser un nombre décimal par un autre nombre décimal.

Remarque.

10. Le Dividende peut avoir plus de décimales que le Diviseur, il peut avoir un nombre égal, ou plus petit.

1°. Si les décimales du Dividende surpassent celles du Diviseur, il faut opérer comme dans la Division des nombres entiers, & retrancher dans les caracteres du Quotient un nombre de chiffres égal à la différence des décimales du Dividende & du Diviseur.

Soit le nombre 22.34276 à diviser par 412.

$$\begin{array}{r}
 22.34276 \left\{ \begin{array}{l} 54.23 \\ \hline .412 \end{array} \right. \\
 \hline
 2060 \\
 \hline
 1742 \\
 1648 \\
 \hline
 0947 \\
 824 \\
 \hline
 1236 \\
 1236 \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

On voit que le Dividende ayant cinq décimales, & le Diviseur trois, le Quotient doit en avoir deux.

2°. Si la quantité des décimales du Dividende est égale à celles du Diviseur, faites la Division comme à l'ordinaire, & le Quotient n'aura point de décimales, ou exprimera des entiers.

Soit le nombre 0.408 à diviser par 102,

$$\begin{array}{r} 0.408 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ \hline .102 \end{array} \right. \\ \underline{408} \\ 000 \end{array}$$

On trouve qu'il n'y a point de différence entre la quantité des décimales du Diviseur & du Dividende, ainsi ce sont autant d'entiers qui sont marqués au quotient.

3°. S'il arrive qu'il y ait plus de décimales dans le Diviseur que dans le Dividende, il faut alors augmenter les décimales du Dividende, en y ajoutant autant de zero que l'on voudra, faire ensuite la Division, & marquer au Quotient la différence des décimales du Dividende & du Diviseur.

Soit le nombre 94.5 à diviser par 8.430.

$$\begin{array}{r} \text{on écrira pour le Dividende } 94.5000 \quad \left\{ \begin{array}{l} 11.2 \\ \hline 8.430 \end{array} \right. \\ \underline{8430} \\ 10200 \end{array}$$

Soit l'Exemple suivant où le Diviseur n'a point de décimales,

$$\begin{array}{r} 2.448 \quad \left\{ \begin{array}{l} .102 \\ \hline 48 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 24 \\ \hline 24 \end{array} \right. \\ \hline 00 \end{array}$$

Le Quotient aura trois décimales ; car la différence des décimales du Dividende à celles du Diviseur est trois , puisque le Diviseur ne contient aucunes décimales.

Démonstration.

Pour diviser .092 par 0.4 , ou $\frac{92}{1000}$ par $\frac{4}{10}$, on aura par la Regle de la Division des fractions $\frac{920}{4000} = \frac{23}{1000}$ en réduisant à moindres termes , laquelle fraction doit être exprimée ainsi 0.23 qui ne contient que deux décimales ; or il y en avoir trois au Dividende & une au Diviseur ; donc le quotient doit avoir la différence des décimales du Dividende à celles du Diviseur.

Lorsqu'il y a plus de décimales au Diviseur qu'au Dividende , l'on a dit qu'on pouvoit ajouter au Dividende plusieurs zero à discretion , ce qui ne change point la fraction ; car on a démontré que toute fraction comme $4 \frac{23}{100} = 4 \frac{230}{1000} = 4 \frac{2300}{10000} = 4.2300$, ainsi de suite. Où l'on voit qu'on peut ajouter au numérateur tant de zero que l'on voudra.

Remarque premiere.

10. Si l'on ajoute au Dividende un nombre de décimales plus grand que celui du Diviseur , alors le quotient contiendra des décimales ; si au contraire l'on n'ajoute au Dividende qu'un nombre de décimales égal à celui du Diviseur , le quotient ne contiendra que des entiers,

Remarque seconde.

11. Il arrive souvent que dans ces Divisions , il y a des restes , il faut alors ajouter à ces restes autant de zero que l'on voudra , & l'on continuera la Division sur ces restes qui donneront de nouvelles décimales , & qui approcheront plus près de l'entier.

USAGE DES FRACTIONS DECIMALES.

12. Pour se servir de l'Arithmétique décimale que l'on vient d'expliquer , il faut supposer la mesure principale dont il s'agit réduite en dixièmes , centièmes , &c. puis opérer à l'aide de cette supposition sur les fractions comme sur les nombres entiers.

Problème I.

13. Réduire un nombre entier en fractions décimales.

Règle.

Mettez au-devant de ce nombre autant de zero que l'espece de décimale à laquelle on veut le réduire en contient.

E X E M P L E.

Pour réduire 25 toises en centièmes , mettez après 25 deux zero de cette maniere , 25.00 , & la réduction sera faite. Si l'on veut une réduction en millièmes , on mettra 25.000 , &c.

Corollaire.

14. Lorsqu'on fait une Division sur des nombres entiers , & qu'il se trouve des restes , on continuera la Division sur ces restes en leur ajoutant plusieurs zero jusqu'à ce que le reste soit insensible.

EXEMPLE.

Soit proposé 54 toises à diviser par 7, la Division ne se faisant pas exactement, on écrira

$$\begin{array}{r} 54.000 \left\{ \begin{array}{l} 7.714 \\ \hline 7 \end{array} \right. \\ \underline{49} \\ 59 \\ \underline{10} \\ 30 \\ \underline{2} \end{array}$$

Et on trouve à la maniere ordinaire le quotient 7 entiers + $\frac{714}{1000}$. Par cette Méthode on évalue les restes en des parties si petites que l'on veut, de maniere que les nouveaux restes peuvent être négligés sans aucune erreur sensible.

Démonstration.

La Démonstration est évidente, puisque le nombre proposé, ou le Dividende étant réduit par la Multiplication en décimales, comme ici en millièmes, le quotient doit être aussi divisé par la même décimale, c'est-à-dire par des millièmes.

Corollaire.

15. Il s'ensuit que pour diviser sans fraction un moindre nombre par un plus grand, il ne faut qu'ajouter des zero devant le plus petit, & faire la Division comme à l'ordinaire.

EXEMPLE.

Pour diviser 3 par 5, ou $\frac{3}{5}$, on écrira

$$3.00 \left\{ \begin{array}{l} 60 \\ \hline 5 \end{array} \right. = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

On peut mettre autant de zero que l'on voudra, & on retranchera par un point au quotient autant de caracteres que l'on a ajouté de zero.

Soit encore $\frac{2}{3}$ à réduire en décimales, on écrira

$$\begin{array}{r} 2,00 \\ 20 \overline{) 120} \\ \underline{40} \\ 80 \\ \underline{60} \\ 20 \end{array} \begin{array}{l} 66 \\ 3 \end{array} = \frac{66}{100},$$

le quotient est 66, & continuant la Division, on trouve un reste; & quelque quantité de zero que l'on ajoutât, on n'arriveroit point à un quotient exact, mais il différerait peu, ce qui fait que par ce moyen on évalue une fraction à des centièmes, millièmes, &c.

Démonstration.

La Démonstration est la même que celle du Problème précédent (§ 9.)

Problème II.

16. Réduire un nombre de différentes espèces qui ne font point des décimales à une seule fraction décimale.

Soit 25^{toises}, 3^{pieds}, 9^{pouces}. à réduire en décimales.

Je dis premierement 3^{pieds} = $\frac{3}{6}$ = $\frac{5}{10}$;

Ensuite 9^{pouc.} = $\frac{9}{12}$ = 9000 $\left\{ \begin{array}{l} 125 \\ 180 \\ 360 \end{array} \right.$ 72

le quotient est 0.125 = $\frac{125}{1000}$; on aura donc 25^{tois.} $\frac{5}{10} \cdot \frac{125}{1000}$, lesquelles fractions étant ajoutées, donnent 25^{tois.} $\frac{625}{1000}$. Toute cette préparation se déduit des opérations qui ont été enseignées (§ 5. & 13.)

Problème III.

17. Ajouter & soustraire des fractions par le moyen des décimales.

Règle.

Changez les fractions en décimales, & faites l'Addition ou la Soustraction comme sur les nombres entiers.

Soit $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, qu'il faut ajouter, on aura (par l'Article 14) $\frac{2}{3} = 0.66$

par le même $\frac{3}{4} = 0.75$

dont la somme est égale à 1.41

Soit $\frac{3}{4}$ dont on veut soustraire $\frac{2}{3}$, les fractions étant changées en décimales, on aura 0.75
& 0.66

dont la différence est09 = $\frac{9}{100}$

Problème IV.

18. Multiplier & diviser des Fractions par le moyen des décimales.

Règle pour la Multiplication.

On changera ces Fractions en décimales, & l'on fera la Multiplication comme si c'étoit des nombres entiers.

Soit $\frac{5}{6}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$; on multipliera les numérateurs par 100, ou par 1000, puis on divisera (§ 13) les produits par les dénominateurs pour changer ces fractions en décimales, & on aura

0.833 pour la première;

& 0.750 pour la seconde,

en multipliant, on a 41650

& 5831

Produit total 0.624750 = $\frac{624750}{1000000}$

2°. Faites l'opération comme sur les nombres entiers.

3°. Retranchiez de la racine par un point un nombre de caractères égal au tiers du nombre des zéro par lesquels vous avez multiplié le nombre donné.

Soit proposé 654 dont on veut extraire la racine cube par approximation, on multipliera ce nombre par 1000 cube de 10, ou par 1000000 cube de 100.

654,000,000	8.68	Prove 8.68
512	64 x 3 = 192 <i>diviseur</i>	8.68
242000	192 x 6 = 1152	6944
124056	24 x 36 = 864	5208
	Cube de 6 = 216	6944
17944000		773424
17916032	124056	8.68
reste 027968	7396 x 3 = 22188 <i>div.</i>	8027392
	22188 x 8 = 177504	4520544
	258 x 64 = 16512	8027392
	Cube de 8 = 512	853972672
	17916032	reste 027968
		654,000,000

On aura donc 8.68 = $8 \frac{68}{100}$ pour racine de 654.

On pourroit continuer en ajoutant des zéro, &c

ou par le quarré de 100 qui est 10000 ; donc en extrayant la racine , elle ne contiendra que des dixièmes ou des centièmes , c'est-à-dire qu'il faudra retrancher à la racine un nombre de caracteres égal à la moitié du nombre des zero que l'on a ajouté au nombre proposé. Il n'est pas difficile d'appliquer ce raisonnement à la racine cube , car le cube de 10 est 1000 ; donc , &c.

REMARQUE GÉNÉRALE
pour les Décimales.

On retranche assez communément quelques chiffres d'une fraction décimale , vû l'erreur insensible qui en résulte lorsqu'elle est réduite en un grand nombre de petites parties ; si l'on avoit par exemple 0.5879 , on peut retrancher le dernier chiffre ; mais alors il vaut mieux écrire 0.588 , que 0.587 , car ce millième que j'ajoute , & qui vaut dix dix-millièmes , approche plus d'égaliser les neuf dix-millièmes que j'ai retranchés ; donc $0. \frac{588}{1000}$ est égal à $\frac{5879}{10000}$ à $\frac{1}{10000}$ près.

De même , si l'on avoit 28.79 , & qu'on voulût négliger la décimale , on prendroit 29 au lieu de 28 , parce que 29 approche plus d'égaliser 28.79 , que 28 simplement ; on a coutume d'agir ainsi toutes les fois que le chiffre qu'on retranche surpasse 5 , il est aisé d'en voir la raison ; au contraire si j'avois eu la fraction 8.463 , & que j'eusse retranché la dernière figure 3 , je me serois contenté d'écrire 8.46 , parce que la dernière figure est moindre que 5.

Quant à l'évaluation d'une fraction décimale , on fait la Multiplication du numérateur de la grandeur décimale par le nombre auquel on veut la réduire , l'on divise ensuite le produit par le dénominateur , &

82 CALCUL DES DECIMALES.

le quotient est le nombre cherché ; c'est la même méthode que dans les autres fractions.

Par exemple, pour évaluer la partie décimale d'une toise 0.55556 en pieds & en pouc. on multipliera par 6 nombre des pieds que contient la toise, & le produit..... 333336
divisé par 100000
dénominateur, donnera..... 3.33336
au quotient, d'où l'on peut remarquer qu'en retranchant du produit autant de caractères qu'il y en a dans la décimale proposée, l'excès fera des entiers ; si vous multipliez encore la nouvelle fraction

$$\begin{array}{r} 33336 \\ \text{par} \dots 12^{\text{pouces}} \end{array}$$

on aura au produit..... 400032, & cherchant le quotient on aura la fraction évaluée qui sera égale à $3^{\text{pieds}} 4^{\text{pouces}} \frac{62}{100000} = 0.55556$.

AUTRE EXEMPLE

pour une partie décimale de la livre.

Soit donné pour évaluer en sols, 0.625
multipliez par 20^{sols}

on aura 12^{sols} & 500 qui
multipliés par 12^{deniers}

donneront 6.000
ce qui fait $12^{\text{sols}} 6^{\text{den.}} = 0.625^{\text{me.}}$ de la livre.



CALCUL LITTÉRAL.

DEFINITION PREMIERE.

1. **L'**ALGÈBRE est la Science des grandeurs en général.
On fait avec le secours de l'Algèbre les mêmes opérations qu'avec l'Arithmétique ; mais c'est principalement pour des questions ou Problèmes particuliers qu'on a inventé l'Algèbre, dont on n'apperçoit l'utilité que dans ce qu'on appelle *Equations*, & dans les différentes parties des Mathématiques.

Remarque premiere.

2. S'il faut trouver, par exemple, deux nombres dont le produit soit égal à 60, & la somme égale à 17, on devine en tâtonnant que 5 & 12 satisfont à la question ; car leur somme est 17 & leur produit 60 : mais l'Algèbre donne des règles pour résoudre ces sortes de Problèmes d'une manière générale, & qui par conséquent convient à tous les cas. Les diverses questions qu'on peut faire sur l'usage de l'Algèbre sont inutiles ; c'est en l'étudiant

qu'on appercevra l'utilité & la fécondité de cette Science.

Remarque seconde.

3. Quelques-uns ont appelé l'Algèbre, l'*Arithmétique spéculative*, parce qu'elle emploie dans les différentes opérations du Calcul, des signes généraux, au lieu que l'Arithmétique ordinaire ne considère que des grandeurs particulières. Toutes les fois que nous pensons, nous avons des idées générales ou particulières, les unes ne peuvent être exprimées que par l'Algèbre, & les autres par l'Arithmétique.

DEFINITION II.

4. On donne le nom de *Quantité* à tout ce que l'esprit conçoit pouvoir être augmenté ou diminué.

Hypothèse I.

5. On est convenu de se servir des Lettres de l'Alphabet pour faire les opérations d'Algèbre, & d'employer les premières lettres *a, b, c, d, &c.* pour représenter les quantités connues; on a fait choix au contraire des dernières lettres *x, y, z*, pour signifier les grandeurs inconnues. Cette distinction étoit nécessaire, puisque dans toute question il y a du connu & de l'inconnu.

Hypothèse II.

7. Il y a des signes dont on est convenu, comme celui-ci $+$ qui signifie *plus*, & cet autre $-$ qui signifie *moins*: il y en a encore deux autres, *ſçavoir* $>$, & $<$, le premier veut dire *plus grand*, & le ſecond *plus petit*.

Remarque.

8. Le ſigne $+$ fera d'usage dans l'Addition, & le ſigne $-$ dans la Souſtraction; ainſi pour marquer l'Addition de a avec b , on écrira $a + b$, & pour ſouſtraire b de a , on écrit $a - b$; de ſorte que ſi la valeur de a eſt 5, ſi celle de b eſt 3, cette expreſſion $a + b$, ou $5 + 3$ ſignifie 8, & celle-ci $a - b$, ou $5 - 3$ ſignifie 2. De même $a > b$ ſignifie que a eſt plus grand que b . Toute grandeur qui n'eſt précédée d'aucun ſigne eſt regardée comme poſitive; a , ou $+a$, c'eſt la même choſe. Il eſt inutile d'expliquer pourquoi l'on a choiſi ces manieres de ſ'exprimer, on le verra dans les Problèmes particuliers.

DEFINITION III.

9. Comme il eſt naturel de marquer les mêmes choſes par les mêmes lettres, on appelle grandeurs ſemblables a & a , de même b & b ; au contraire. c & d feront des grandeurs diſſemblables.

Hypothèse III.

10. Lorſqu'il ſ'agit de multiplier, on ſe ſert quelquefois de ce ſigne \times ; c'eſt pourquoi cette maniere de marquer les grandeurs $a \times b$ ſignifie que a eſt multiplié par b ; mais en ce cas on regarde la multiplication plutôt indiquée que faite, & lorſqu'on

veut la faire effectivement, on écrit ab , c'est-à-dire qu'on joint les grandeurs à côté l'une de l'autre.

Remarque.

11. Il arrive souvent qu'ayant plusieurs grandeurs de suite dont on veut indiquer la multiplication des unes par les autres, on les écrit ainsi: $a + b + c \times d$. Cette manière d'arranger les lettres, signifie que toutes les grandeurs $a + b + c$ sont multipliées par d . On les marque encore de cette sorte $(a + b + c) \times d$.

Hypothèse IV.

12. La manière dont on est convenu pour marquer qu'une quantité représentée par a est divisée par une autre représentée par b s'exprime ainsi $\frac{a}{b}$. De même, s'il y a plusieurs grandeurs, comme $a + b + c$ divisées par $d + f$, on écrira $\frac{a + b + c}{d + f}$. Ces manières de marquer les diverses opérations, ont une utilité qui ne peut se sentir que par la suite.

Remarque première.

13. Lorsque deux quantités sont égales, comme a & b , on les marque ainsi $a = b$. Des grandeurs sont nommées *complexes*, lorsqu'elles sont jointes par le signe $+$ ou $-$, par exemple $a + b$, ou $c - d + f$, sont dites *grandeurs complexes*.

Remarque seconde.

14. On a distingué les grandeurs en positives & en négatives. On appelle grandeurs *positives* celles qui sont précédées du signe $+$, comme $+a$, $+b$; & grandeurs *négatives* celles qui sont précédées du signe $-$, comme $-a$, $-b$. Cependant ces grandeurs négatives sont aussi réelles que les positives;

ainsi $-a$, & $+a$ font deux grandeurs égales, mais dans un sens opposé, ce qui fait que cette distinction n'est pas arbitraire, mais réelle. Imaginons, par exemple, deux Voyageurs qui partant du même point font chacun 6 lieues, l'un à l'Orient, & l'autre à l'Occident; si je dirige mon intention du côté de l'Orient, celui qui a suivi cette route aura fait $+6$ lieues, tandis que l'autre qui va du côté de l'Occident, c'est-à-dire du côté opposé en aura fait -6 . Les distances parcourues sont égales entre-elles, mais prises dans un sens dont les signes $+$ & $-$ marquent l'opposition.

Corollaire.

15. Il faut conclure de cette Remarque, que si deux grandeurs semblables se rencontrent ensemble, & que l'une soit positive & l'autre négative, elles se détruiront mutuellement, à cause de cette opposition; ainsi $+a - a = 0$.

Hypothèse V.

16. Lorsqu'il y a quelques nombres qui accompagnent les grandeurs algébriques comme $2a$, $3b$, &c. ces nombres sont appelés *Coefficiens*, & conservent leur valeur numérique, ainsi $2a$ signifie le double de a , & $3b$ le triple de b . Voilà les notions générales dont on a besoin pour commencer les opérations qui vont suivre.

Problème I.

17. Réduire des quantités algébriques à la plus simple expression.

Règle.

1°. Ecrivez les quantités semblables les unes sous les autres.

2°. Puis si ces quantités semblables ont le même signe, ajoutez-les en mettant ce même signe; si au contraire elles ne l'ont pas, écrivez la différence, en lui donnant le signe de la quantité qui est la plus grande.

Soit donné $3a + 5b$, & $2a - 3b$ à réduire à la plus simple expression. On rangera les grandeurs de cette manière

$$\begin{array}{r} 3a + 5b \\ 2a - 3b \\ \hline \text{Réduction } 5a + 2b \end{array}$$

On dira $3a + 2a$ égalent $5a$, de même $5b - 3b$ égalent $2b$; on écrira donc pour la réduction $5a + 2b$.

On doit appercevoir qu'il n'y a de réduction à faire sur les grandeurs algébriques, que lorsqu'il y a des quantités semblables; on se propose par ce Problème de simplifier les grandeurs.

Démonstration.

La Démonstration est évidente; car par cette opération on ne fait que retrancher les choses qui sont opposées, & ajouter les choses semblables; donc.

Problème II.

18. Ajouter des grandeurs algébriques.

Règle.

Écrivez les grandeurs semblables les unes sous les autres, s'il y en a, & faites la réduction. S'il n'y a point de grandeurs semblables, écrivez les quantités de suite, en donnant à chacune les signes dont elles sont accompagnées.

Soit donné $3a - 2b + 6c + 2d$
& $a + 2b - 3c - 3d$

la somme totale est $\underline{4a \quad 0 + 3c - d}$

On a fait l'opération en prenant la somme des grandeurs ou leur différence, parce qu'il y avoit des quantités semblables, & d'autres qui se sont détruites, à cause des signes opposés.

A U T R E E X E M P L E.

Soit proposé d'ajouter les grandeurs suivantes

$4a + 5b - 3d$
 $6c - 3f + 2g$

Somme totale $\underline{4a + 5b - 3d + 6c - 3f + 2g}$

Regle.

Dans cet Exemple il faut écrire, comme on l'a dit, les grandeurs l'une après l'autre, chacune avec son signe & l'Addition est faite.

Démonstration.

Ajouter, c'est joindre des grandeurs ensemble, à quoi l'on parvient en réunissant avec leurs signes, les quantités semblables en un tout, ce que l'on fait par l'opération.

Problème III.

19. Soustraire des quantités algébriques, soit qu'elles aient le même signe, soit qu'elles ne l'aient point.

Règle.

1°. Ecrivez les grandeurs semblables, s'il y en a, les unes sous les autres.

- 2°. Changez les signes des quantités qui soustraient.
 3°. Faites la réduction, & la Soustraction sera faite.

$$\begin{array}{r}
 \text{Soit donné} \dots\dots\dots 8a - 5c + 9d \\
 \text{dont on veut ôter} \dots\dots\dots 6a - 8c - 7d \\
 \hline
 \text{Reste ou Différence} \quad 2a + 3c + 16d
 \end{array}$$

En changeant les signes de la grandeur qui soustrait, on aura $-6a + 8c + 7d$, puis faisant la réduction de ces termes avec ceux de $8a - 5c + 9d$, on a la différence $2a + 3c + 16d$.

Démonstration.

Soustraire, est prendre la différence de deux grandeurs; or pour trouver cette différence, il faut changer le positif en négatif, & le négatif en positif, puisque l'un est contraire à l'autre, & faire la réduction, ce que l'on a fait. Dans l'Arithmétique, on change seulement le positif en négatif, mais c'est que dans l'Arithmétique il n'y a que des grandeurs positives; au contraire dans l'Algèbre il y a des grandeurs négatives & positives, donc il faut changer l'un & l'autre signe pour faire la Soustraction.

Remarque.

20. Il est à remarquer qu'on ne peut soustraire le négatif qu'en le rendant positif, ainsi quand on soustrait une grandeur négative de quelque quantité, on lui ajoute réellement cette même valeur; c'est pourquoi soustraire une grandeur négative, est comme si l'on vouloit soustraire les dettes de quelqu'un; pour y parvenir il faudroit les payer; par conséquent on augmenteroit son bien de cette quantité: mais l'idée qui est présentée dans la Démonstration est la vraie & la meilleure de toutes.

A U T R E E X E M P L E .

$$3a + 2b - 4d$$

$$6c + 4f - 3g$$

$$\text{Reste ou Diff. } \underline{3a + 2b - 4d - 6c - 4f + 3g}$$

Règle.

Changez pareillement les signes de la grandeur qui soustrait , puis écrivez de suite toutes les quantités comme on le voit , & la Soustraction sera faite.

Remarque.

21. Il n'y a point dans cet Exemple , comme dans le premier, de réduction à faire, parce qu'il n'y a point de grandeurs semblables ; donc suivant la règle , il faut changer les signes de la grandeur qui soustrait , & les écrire de suite.

Problème IV.

22. Multiplier des quantités algébriques les unes par les autres, soit qu'elles ayent le même signe , soit qu'elles ne l'ayent pas.

Règle.

1°. Multipliez toutes les quantités du Multiplicande par chaque quantité du Multiplicateur , ce qui se fait en joignant les grandeurs à côté l'une de l'autre , suivant la convention (§ 10.)

2°. De plus, comme il faut marquer le rapport qu'ont ces grandeurs les unes aux autres , il faut avoir égard aux signes; observez donc que le signe $+$ multipliant le signe $+$ fera $+$ au Produit ; que le signe $+$ multipliant le signe $-$, donnera le signe $-$ au produit ; & que le signe $-$ multipliant le signe $-$, donnera $+$ au produit.

3°. Faites la réduction, s'il y a des grandeurs semblables, & vous aurez le produit total.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Soit.....} & a + b - d \\
 \text{à multiplier par...} & a - b - d \\
 \hline
 1^{\text{er}}. \text{ produit par } a. & aa + ab - ad \\
 2^{\text{e}}. \text{ produit par } -b. & -ab \qquad -bb + bd \\
 3^{\text{e}}. \text{ produit par } -d. & \qquad -ad \qquad -bd + dd \\
 \hline
 \text{Produit total.....} & aa \quad 0 \quad -2ad \quad -bb \quad 0 \quad +dd
 \end{array}$$

On voit dans cet Exemple que la réduction des termes, a produit l'évanouissement de certaines grandeurs, & la somme de quelques autres.

A U T R E E X E M P L E.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Soit.....} & 3a - 2b \\
 \text{à multiplier par} & 5c + 8d \\
 \hline
 \text{On aura} & 15ac - 10bc \\
 \text{\&} & \qquad \qquad + 24ad - 16bd \\
 \hline
 \text{Produit total} & 15ac - 10bc + 24ad - 16bd
 \end{array}$$

R e g l e.

- 1°. Multipliez les Coefficiens les uns par les autres, ainsi que dans la Multiplication des Nombres.
- 2°. Multipliez les grandeurs algébriques comme à l'ordinaire. On dira donc $3a$ multiplié par $5c$ donne $15ac$, & le reste comme on le voit.

Démonstration.

Il est évident qu'on doit multiplier toutes les quantités du Multiplicande par chaque quantité du Multiplicateur, pour avoir le Produit total ; puis suivre la convention qui a été établie pour la Multiplication (§ 10.) ; c'est ce qu'on a fait dans l'opération.

Démonstration pour les Signes.

La Multiplication est *une Addition ou une Soustraction réitérée de la même quantité* ; d'où il suit que le signe $+$ multipliant le signe $+$ donne pour produit $+$, parce que la Multiplication est alors l'Addition réitérée d'une grandeur positive, qui ne peut produire que $+$.

De même $-$ multipliant le signe $-$ produira le signe $+$, parce qu'alors c'est une Soustraction réitérée d'une grandeur négative ; or, pour soustraire une quantité qui a le signe $-$, il faut mettre le signe $+$ (§ 19.), si donc on soustrait $- 3$ une fois, il faut écrire $+ 3$, & pour le soustraire encore une fois, c'est-à-dire deux fois, on écrira $+ 6$.

Donc pour multiplier $- 3$ par $- 2$, on aura $+ 3 + 3 = 6$.

Donc $- b \times - c = + bc$; car il faut soustraire $- b$ le nombre de fois qu'il est marqué par c , puisqu'enfin la Multiplication est la répétition d'une quantité quelconque, soit par Addition, soit par Soustraction. Cette Définition ne peut convenir aux grandeurs numériques, parce que toutes les grandeurs sont positives dans l'Arithmétique.

Quant aux autres signes $+$ multipliant $-$, le produit doit avoir le signe $-$, parce que *plus moins* indique plusieurs fois *moins*, ou une répétition de la négation ; donc le produit doit avoir le signe $-$.

Au contraire *moins plus*, ou $-$ multipliant $+$, indique l'opposition du *plus*, ou la négation du *plus*, donc le produit doit avoir le signe $-$; ainsi dans l'un & l'autre cas $+$ par $-$, & $-$ par $+$, donne toujours le même signe $-$; ce qu'il falloit démontrer. Ceci est déduit de l'idée même des signes & de celle de la Multiplication.

Problème V.

23. Diviser une grandeur littérale par une autre.

Règle.

1°. Ecrivez les grandeurs du Dividende, & à côté celles du Diviseur; mais qu'elles soient séparées par un petit arc, comme dans la Division des Nombres.

2°. Effacez les grandeurs communes au Dividende & au Diviseur, & mettez au Quotient celles qui ne le sont pas, en observant la même Règle des signes que dans la Multiplication.

3°. Multipliez le Quotient par le Diviseur, & ôtez le produit des grandeurs semblables.

4°. Puis, s'il reste des grandeurs communes au Dividende & au Diviseur, recommencez la même opération sur les grandeurs suivantes du Dividende; s'il n'y en a point, écrivez à part le reste & le Diviseur au-dessous.

E X E M P L E.

Soit le Dividende

$$\begin{array}{rcl}
 & & \left. \begin{array}{l} aaa - 3aab + 3abb - bbb \\ \hline a - b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Quot.} \\ \text{Diviseur.} \end{array} \\
 1^{\text{er}} \text{ prod.} & - & aaa + aab \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste.} & 0 & - 2aab + 3abb - bbb \text{ à rediviser.} \\
 2^{\text{e}} \text{ prod.} & + & 2aab - 2abb \\
 \hline
 2^{\text{e}} \text{ reste.} & 0 & + abb - bbb \\
 3^{\text{e}} \text{ prod.} & - & abb + bbb \text{ à rediviser.} \\
 \hline
 \text{Reste} & 0 & 0
 \end{array}$$

On dira aaa divisé par a donne aa au Quotient qui multiplié par tout le Diviseur $a - b$, donne $+aaa - aab$ qu'il faut soustraire du Dividende en changeant les signes de ce produit, après quoi il restera $-2aab + 3abb - bbb$.

On recommencera la Division sur ce premier reste en disant — $2aab$ divisé par a , donne au Quotient — $2ab$ qui multiplié par le Diviseur, donne le second produit — $2aab + 2abb$, lequel étant soustrait, on a pour second reste $+abb - bbb$.

On continuera la Division sur ce second reste, en disant $+abb$ divisé par a donne $+bb$; puis on multipliera & on soustraira le troisième produit des termes du Dividende, & l'opération sera finie.

Démonstration.

Il est clair qu'il faut effacer les grandeurs communes au Dividende & au Diviseur pour faire la Division, puisqu'une quantité qui divise & qui multiplie une grandeur, ne lui procure aucun changement. De plus, on est convenu dans la Multiplication, de joindre les grandeurs (§ 10.), donc il faut les effacer dans la Division, laquelle est une opération contraire à la Multiplication.

En second lieu, il faut multiplier le Quotient par tous les termes du Diviseur, pour faire la Soustraction du Dividende, afin de voir quel est le reste.

Voici quelques autres Exemples pour s'exercer.

Soit le Dividende

$$\begin{array}{rcl}
 & aa & - bb \\
 1^{\text{er}} \text{ produit} & \dots - aa + ab & \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste} & \dots 0 + ab - bb & \\
 2^{\text{e}} \text{ produit} & \dots - ab + bb & \\
 \hline
 \text{Reste} & 0 & 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} a + b \text{ Quotient.} \\ a - b \text{ Diviseur.} \end{array} \right.$$

Soit le Dividende

$$\begin{array}{rcl}
 & 6aaa - 13aab + 6abb & \\
 \text{Produit} & \dots - 6aaa + 9aab & \\
 \hline
 \text{Reste} & \dots 0 - 4aab + 6abb & \\
 \hline
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 3a - 1b \\ 2aa - 3ab \end{array} \right.$$

On divisera $6aaa$ par $2aa$, en disant : 2 est dans 6 trois fois, & effaçant les grandeurs semblables, on aura $3a$ pour la première partie du Quotient, le reste s'achèvera de la même manière, ayant égard aux Coefficiens dont on fera la Division comme dans les Nombres.

Soit le Dividende

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 aabc + accc - abdd - cdd + dddd \\
 1^{\text{er}} \text{ prod. } - aabc \qquad + abdd
 \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} ab + ac \\ ac - dd \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 1^{\text{er}} \text{ reste. } \quad 0 + accc \quad 0 - cdd + dddd \text{ à rediviser.} \\
 2^{\text{e}} \text{ prod. } \quad \quad - accc \quad + cdd
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Reste} \quad 0 \quad 0 + \frac{dddd}{ac - dd} \text{ lequel ne peut plus se diviser.}
 \end{array}$$

Remarque.

24. Il est à propos pour faire ces Divisions avec plus de facilité, de ranger les termes du Dividende & du Diviseur par rapport à la même lettre, & de choisir celle qui est répétée un plus grand nombre de fois, ce qu'on appelle *ordonner* les termes. On a eu égard à cette observation dans les règles proposées.

DEFINITION IV.

25. Si une grandeur est multipliée par elle-même, le produit se nomme le carré de cette grandeur.

La grandeur simple s'appelle la Racine Quarrée ou Cubique, selon le degré auquel cette grandeur est élevée.

Hypothèse VI.

26. Lorsque la même grandeur est multipliée plusieurs fois par elle-même, on est convenu d'exprimer par un chiffre la quantité de fois qu'elle est multipliée par elle-même; ainsi aa , aaa , & $aaaa$, se marquera de cette manière a^2 , a^3 , a^4 . Et toute autre quantité, comme b^2 , b^3 , b^4 , b^5 , est dite élevée au second, au troisième, au quatrième, au cinquième degré, &c.

Et pour marquer qu'une grandeur est élevée à une puissance, ou à un degré indéterminé, on écrit ainsi a^m , c'est-à-dire que la quantité est conçue élevée à un degré quelconque, comme le centième, le millième, si l'on veut.

On nomme les chiffres qui sont ainsi placés à droite au haut de la grandeur littérale, les *Exposans* de cette grandeur.

Remarque.

27. On va donner la manière de multiplier & de diviser les grandeurs semblables qui ont des exposans, les unes par les autres: car l'Addition & la Soustraction se font par les signes $+$ & $-$, comme celles des autres quantités.

Multiplication des grandeurs semblables qui ont des exposans.

Règle.

28. Ajoutez les exposans & écrivez leur somme à droite un peu au-dessus de la grandeur.

98 C A L C U L

Soit $a^3 \times a^4$

On ajoutera les exposans : $3+4=7$, qu'il faut écrire ainsi a^7 .

En general $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Demonstration.

Par l'Hypothèse (§ 26) $a^3 = aaa$

& $a^4 = aaaa$

Or $aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$
 par la même hypothèse ; donc il faut ajouter les exposans des grandeurs semblables lorsqu'on veut les multiplier.

Remarque.

29. Si les grandeurs proposées ne sont point semblables comme a^3 & b^2 , on les multiplie de cette manière $a^3 b^2$ suivant l'idée de la multiplication ordinaire ; car on ne peut ajouter les exposans, puisque les quantités sont dissemblables.

*Division des grandeurs semblables
 qui ont des exposans.*

Règle.

30. Soustrayez l'exposant du Diviseur, de celui du Dividende.

Soit a^5 à diviser par a^3 , écrivez $a^{5-3} = a^2$.

Corollaire.

31. Il faut conclure de cette Démonstration que $a^0 = 1$, car $\frac{a^3}{a^3} = 1$, puisque toute grandeur est dans elle-même une fois ; or par cette règle $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; donc $a^0 = 1$. Ce qu'il falloit prouver.

Remarque.

32. Une grandeur a^3 déjà élevée à un degré quelconque , peut être encore élevée au Quarré, au Cube , &c. D'où suit l'élevation des puissances.

*Elévation des Puissances.**Règle.*

33. Multipliez l'exposant de la grandeur donnée par l'exposant de la puissance à laquelle vous voulez élever cette grandeur donnée.

Soit a^3 qu'on propose d'élever au Quarré , ou à la seconde puissance. On multipliera l'exposant 3 par 2 qui exprime la seconde puissance. De même pour élever a^4 au cube , on fera $a^{4 \times 3} = a^{12}$, &c.

En general a^m qu'on veut élever à la puissance n , s'écrira a^{mn} .

Démonstration.

Élever a^3 au Quarré, c'est multiplier a^3 par a^3 ; or par la Règle de la Multiplication (§ 28.) il faut écrire $a^{3+3} = a^6$; mais $a^3 \times 2 = a^6$; donc il faut multiplier les exposans l'un par l'autre , & écrire le produit au haut de la grandeur qu'on veut élever.

DEFINITION V.

34. Extraire la racine d'une puissance seconde,

troisième, quatrième, &c. c'est trouver la grandeur qui multipliée une fois par elle-même (§ 25.) deux fois, trois fois, &c. produit la puissance seconde, troisième, quatrième, &c.

Extraction d'une Puissance.

Règle.

35. Divisez l'exposant de la puissance par l'exposant de la racine que vous voulez extraire.

Soit a^6 dont on demande la racine quarrée, ou la racine deuxième, on divisera l'exposant 6 par 2, & on aura $a^{\frac{6}{2}} = a^3$.

De même la racine Cube de a^6 fera $a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

En général, la racine n de $a^m = a^{\frac{m}{n}}$.

Démonstration.

Pour élever une grandeur a^3 au Quarré, il faut multiplier 3 par 2, & l'on a a^6 ; donc pour extraire la racine quarrée de a^6 , il faut par la raison contraire diviser l'exposant 6 de la grandeur donnée par celui de la racine qui est 2.

Remarque premiere.

36. On se sert encore de ce signe $\sqrt{}$ pour marquer qu'on veut extraire la racine d'une grandeur, & il se nomme le signe radical ou marque radical.

des exposans positifs. Rien n'est plus ordinaire dans le Calcul que de trouver des quantités marquées de cette maniere a^{-3} , a^{-4} . Voici l'origine de ces exposans négatifs.

Dans la Division des grandeurs qui ont des exposans positifs comme a^3 , a^5 , &c. par d'autres grandeurs semblables qui ont aussi des exposans positifs, il peut arriver que l'exposant du Diviseur soit plus grand que celui du Dividende, par exemple dans $\frac{a^3}{a^5}$; or suivant l'art. (§ 30) de la Division des grandeurs littérales qui ont des exposans, il faut soustraire celui du Diviseur de celui du Dividende; donc on aura ici $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$; c'est pourquoi ces exposans négatifs viennent d'une Division où l'exposant du Diviseur est plus grand que celui du Dividende; il est encore important de remarquer que cette expression $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ce qu'on démontre ainsi :

Démonstration.

Suivant la Regle de la Division (§ 23.), on doit effacer les grandeurs semblables, on aura donc dans l'exemple proposé $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$.

Mais en suivant la Regle (§ 30.) par laquelle il est ordonné de soustraire l'exposant du Diviseur de celui du Dividende pour faire la Division, on aura pour le même exemple $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Corollaire.

38. Il s'ensuit que toute grandeur qui a un exposant négatif, comme a^{-3} , a^{-7} , peut être mar-

quée ainsi : $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^7}$, & par conséquent $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^7}$
 $= a^{-3}$, a^{-7} ; donc on peut transposer les grandeurs
 du dénominateur au numérateur, & du numérateur
 au dénominateur, en changeant les signes; par con-
 séquent $a^3 b^{-2} = a^3 \times \frac{1}{b^2} = \frac{a^3}{b^2}$, & $\frac{a^4}{b^3} = a^4 b^{-3}$
 $= \frac{b^{-3}}{a^{-4}}$, & ainsi des autres.

Remarque troisième.

39. Nous ajouterons que les grandeurs dont les
 exposans sont fractionnaires, comme $a^{\frac{1}{2}}$, viennent
 de la racine d'une puissance incomplète; car $\sqrt[3]{a^3}$
 $= a^{\frac{1}{3}}$, puisque pour élever (§ 33.) une grandeur
 qui a un exposant, au Quarré, au Cube, &c. il faut
 multiplier son exposant par celui de la puissance à la-
 quelle on veut l'élever; donc pour l'extraire comme
 on l'a vu dans l'article (§ 30.), il faut diviser l'ex-
 posant de la grandeur donnée par celui de la racine;
 c'est pourquoi $\sqrt[3]{b^3}$, $\sqrt[4]{c^4}$, & ces expressions
 $b^{\frac{1}{3}}$, $c^{\frac{1}{4}}$ sont des quantités égales.

Il est encore utile de faire attention que ces mê-
 mes expressions peuvent convenir aux nombres,
 qui peuvent être ainsi caractérisés; c'est pourquoi
 8^2 signifiera le quarré de 8 = 64, & $4^3 = 64$ &
 $8^{-3} = \frac{1}{8^3}$, laquelle expression est égale à $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.
 De même $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{\sqrt[2]{9}} = \frac{1}{3}$. Ces expres-
 sions se rencontrent souvent dans le Calcul.

Enfin $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, ainsi des autres.
 L'égalité de ces expressions est démontrée par les
 Remarques précédentes, & par la première partie
 de celle-ci.

Quant au Calcul de ces grandeurs dont les exposans sont négatifs ou fractionnaires, il faut opérer suivant les règles enseignées dans la Multiplication, Division, Élévation, & Extraction, cela ne change rien ; ainsi les regles sont generales : en voici cependant les exemples.

Multiplication & Division des grandeurs qui ont des exposans soit positifs, soit négatifs, entiers, ou fractionnaires.

Regle pour la Multiplication.

40. Suivant la Regle, ajoutez les exposans.

$$\text{Soit } a^{-3} \times a^{-5} = a^{-3-5} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}, \text{ par}$$

le Corollaire (§ 38).

$$\text{Car } -3-5=-8, \text{ donc}$$

$$\text{Soit } a^{-3} \times a^{+5} = a^{-3+5} = a^2.$$

$$\text{Car } -3+5=2, \text{ donc}$$

$$\text{Soit } a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{a^{11}} \text{ par}$$

la troisième Remarque (§ 39.).

$$\text{Car } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}, \text{ donc}$$

$$\text{Soit } a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{11}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{11}}} \text{ par la troisième Remarque (§ 39).}$$

$$\text{Car } -\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{12}, \text{ donc}$$

$$\text{Soit } a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{a^5}} \text{ par la troisième Remarque (§ 39.)}$$

Car $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$, qui est l'excès ou la différence de ces deux fractions, donc

Règle pour la Division.

41. Soustrayez l'exposant du Diviseur de celui du Dividende.

Soit $\frac{a^{-3}}{a^{-\frac{1}{2}}}$, on fera suivant la règle $a^{-3} + \frac{1}{2} = a^{-\frac{5}{2}}$.

Car $-3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, donc

$$\text{Soit } \frac{a^{-3}}{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{-3 + \frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}, (\S 39.)$$

On peut suppléer à la diversité des signes que peuvent avoir les exposans, ce qui fournira différens exemples qu'on a négligé de donner.

Exaltation & Extraction de ces mêmes grandeurs.

Règle pour l'Exaltation.

42. Multipliez l'exposant de la grandeur donnée, par celui auquel vous voulez l'élever.

Soit a^{-3} à élever à la quatrième puissance, on fera $a^{-3} \times 4 = a^{-12} = \frac{1}{a^{12}}$.

Si les exposans sont fractionnaires, il faut seulement avoir égard au calcul des fractions numériques, & opérer suivant la Règle.

Règle pour l'Extraction.

43. Divisez l'exposant de la grandeur proposée par l'exposant de la racine.

Soit a^{-3} , & $a^{\frac{3}{2}}$, & $a^{-\frac{7}{3}}$, dont on demande la racine quatrième, on fera en divisant les numérateurs par 4, $a^{-\frac{3}{4}}$, & $a^{\frac{3}{8}}$, & $a^{-\frac{7}{12}}$, lesquelles peuvent être changées dans les expressions qui suivent;

la première en celle-ci $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$, la seconde

est égale à $\sqrt[4]{a^5}$, & la troisième à $\frac{1}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7}}$

selon la Remarque (§ 39.)

Corollaire important.

44. Il est aisé de remarquer que le calcul des grandeurs qui sont accompagnées des signes radicaux, devient très-facile par celui qu'on vient d'enseigner sur les exposans, puisque toute grandeur qui a un signe radical, peut changer d'expression, & être convertie en une autre qui lui soit égale, & qui ait un exposant fractionnaire. C'est l'idée que l'on s'est proposée dans l'invention de ce calcul qui est d'un grand usage dans les Mathématiques.

Soit par exemple $\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}$, on fera $\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}$, & $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, or pour multiplier $a^{\frac{3}{3}}$ par $a^{\frac{2}{3}}$, on écrira $a^{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$.

Il ne fera pas plus difficile de diviser les signes

radicaux, de les élever à une puissance quelconque, & d'extraire de nouvelles racines, il suffira de faire évanouir les signes radicaux, en donnant aux grandeurs les expressions fractionnaires qui leur sont égales, & on fera alors comme il a été enseigné dans les regles précédentes. On auroit pu faire plusieurs remarques sur ce calcul, & en déduire plusieurs conséquences qu'il est plus avantageux de trouver par soi-même.

Si l'on n'a pas employé des exposans généraux, c'est qu'ils sont inutiles pour les regles présentes, & qu'il est facile d'en substituer.

DEFINITION VI.

45. Un rapport est la comparaison de deux grandeurs semblables, si l'on examine combien la grandeur contient où est contenue dans celle avec laquelle on la compare. On appelle ce rapport, *rapport géométrique*, on le marque de cette manière $\frac{a}{b}$

Cette expression signifie donc que l'on compare a avec b , & que c'est un rapport géométrique, ou un rapport de division : a est l'antécédent, & b le conséquent ; si le rapport de $\frac{a}{b}$ est nommé *direct*,

celui de $\frac{b}{a}$ sera nommée *réci-proque* ou *inverse*.

DEFINITION VII.

Théorème I.

47. Dans toute Proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Démonstration.

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a.b :: c.d$, je dis que $ad = bc$.

Soit le quotient de $\frac{a}{b} = q$, celui de $\frac{c}{d} = q$, puisque les deux rapports sont supposés égaux; donc (§ 23.) $qb = a$, & $qd = c$. La proportion proposée pourra donc être changée en celle-ci $qb.b :: qd.d$; or en multipliant les extrêmes l'un par l'autre, ainsi que les moyens, on aura $qbd = qbd$, c'est-à-dire, qu'on trouve les mêmes quantités de part & d'autre; donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Delà on conclut que si $a.b :: b.c$, que le produit $ao = bb$.

Corollaire.

48. Si j'ai $ad = bc$, & que je fasse $a.b :: c.d$, ou bien $c.a :: d.b$, ce qui s'appelle prendre les grandeurs *reciproquement*, j'aurai toujours $ad = bc$, ou le produit des extrêmes égal au produit des moyens; donc le produit de deux grandeurs étant égal au produit de deux autres, on pourra toujours mettre ces grandeurs en proportion, pourvu que l'on conserve le produit des extrêmes égal au produit des moyens.

Théorème II.

49. Quatre grandeurs étant en proportion géométrique, elles y seront encore des quatre manieres suivantes, qu'on nomme

invertendo.
alternando.
addendo.
subtrahendo

Démonstration.

Soit $a. b :: c. d$, je dis $b. a :: d. c$, changement qu'on nomme *invertendo*.

Car on aura $bc = ad$, c'est-à-dire, le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

De même, soit $a. b :: c. d$, je dis que $a. c :: b. d$, on nomme ce changement *alternando*.

Car on aura $ad = bc$, donc, &c.

Soit encore $a. b :: c. d$, je dis que $a + b. b :: c + d. d$, ce changement s'appelle *addendo*.

Car en prenant le produit des extrêmes & des moyens, on aura $ad + bd = bc + bd$, ôtant de part & d'autre bd , on trouve $ad = bc$, donc.

Soit enfin $a. b :: c. d$, je dis que $a - b. b :: c - d. d$, changement qu'on appelle *subtrahendo*.

Car $ad - bd = bc - bd$; donc en ôtant bd de part & d'autre, on aura $ad = bc$.

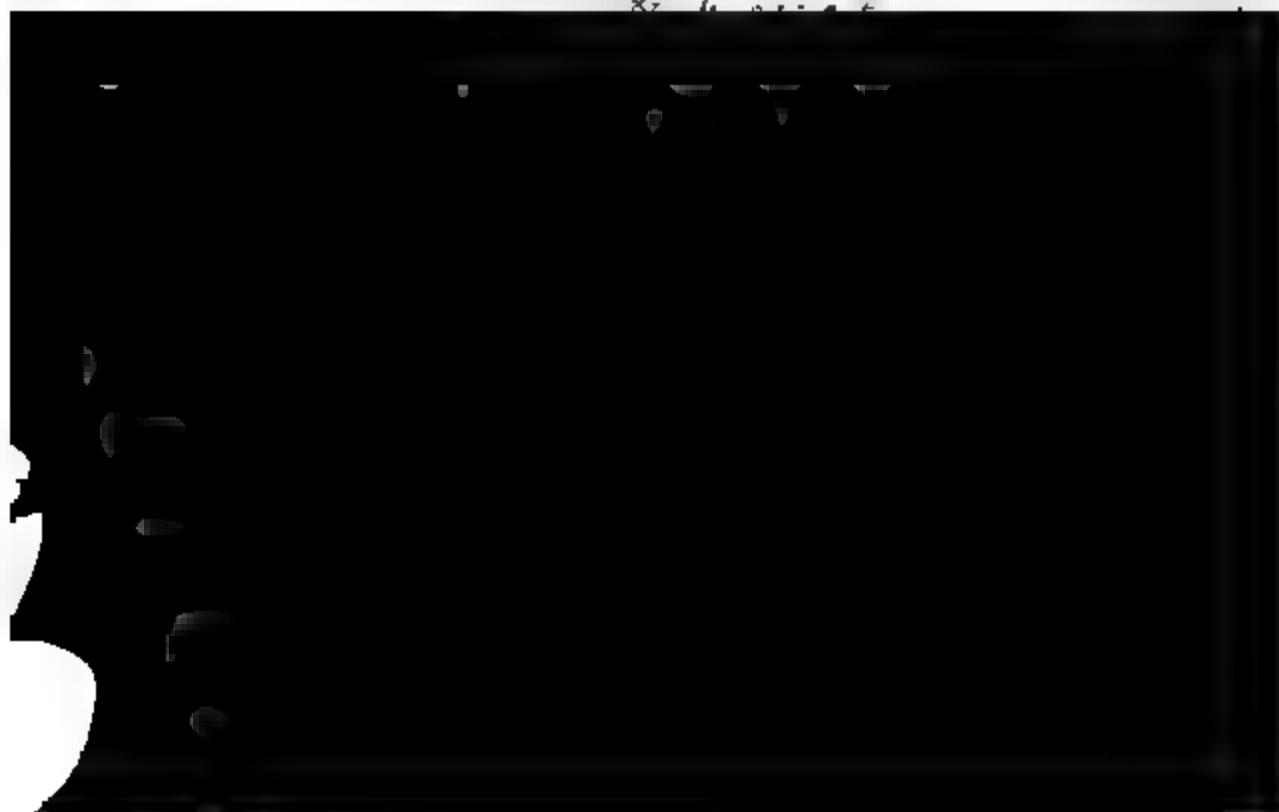
On peut par le même principe déduire de nouvelles conséquences. Soit par exemple $a. b :: c. d$, $m. a :: p. r$, on conclura que $m. b :: p. dr$, ce qu'on appelle *componendo*.

Soit encore deux suites de grandeurs a, b, c , & e, d, f , telles que $a. b :: e. d$, & $b. c :: d. f$, on conclut que $a. e :: c. f$, ce qu'il est aisé de démontrer.

De même, si l'on suppose a, b, c , & e, f, g ,

En sorte que $a. b :: f. g$,

&c. l'on aura



Démonstration.

Il faut démontrer que $a. b :: ac. bc$; or le produit des extrêmes $abc = abc$ produit des moyens, ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes quantités, donc

Corollaire.

§ 1. Il suit qu'on peut multiplier les termes d'une proportion par telle quantité que l'on voudra, & les nouveaux produits seront en proportion.

Théorème IV.

§ 2. Deux grandeurs a & b divisées par une même, comme c , les quotiens sont en même raison que les grandeurs.

Démonstration.

Il faut démontrer que $a. b :: \frac{a}{c}. \frac{b}{c}$, ce qui est évident, puisque $\frac{ab}{c}$, produit des extrêmes est égal à $\frac{ab}{c}$, produit des moyens ; donc, &c.

Corollaire.

§ 3. On peut diviser les termes d'une proportion par telle quantité que l'on voudra, & les nouvelles quantités ou quotiens seront en proportion.

Théorème V.

§ 4. La même grandeur étant divisée par deux autres, les quotiens comme $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$ sont réciproquement comme les diviseurs.

Démonstration.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} :: c \cdot b$, puisque le produit des extrêmes

$\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$ produit des moyens ; car $\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab}{b} = a \\ \frac{ac}{c} = a \end{array} \right.$

Théorème VI.

§ 55. Quatre grandeurs étant proportionnelles, $a \cdot b :: c \cdot d$, on pourra dire que $a \cdot b :: \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{c}$ c'est-à-dire que les deux premières sont comme l'unité divisée réciproquement par les grandeurs qui font le second rapport.

Démonstration.

Puisque $a \cdot b :: c \cdot d$, en divisant le second rapport par c , on aura $a \cdot b :: 1 \cdot \frac{d}{c}$. en divisant ce même rapport $1 \cdot \frac{d}{c}$ par d , on aura $a \cdot b :: \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{c}$, donc, &c.

Théorème VII.

§ 56. Lorsqu'on a une suite de plusieurs rapports égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, la somme des antécédents $a + c + f$, est à la somme des conséquents $b + d + g$, comme un antécédent est à son conséquent, comme $a \cdot b$.

Démonstration.

Si $a + c + f, b + d + g :: a, b$, on aura le produit des extrêmes $ab + bc + bf = ab + ad + ag$ produit des moyens ; or ces deux produits sont égaux, puisque $bc = ad$, & $bf = ag$, donc, &c.

Problème VI.

57. Trois grandeurs étant données, on propose le trouver une quatrième proportionnelle.

Règle.

1°. Multipliez les deux derniers termes l'un par l'autre.

2°. Divisez le produit par le premier terme, & le quotient sera le quatrième proportionnel.

E X E M P L E.

Soient les trois grandeurs a, b, c , données, & l'on cherche la quatrième proportionnelle nommée x , on fera $a. b :: c. x$, on aura donc $x = \frac{bc}{a}$.

Car $ax = bc$, or deux quantités égales divisées par des quantités égales sont égales, donc.

Remarque.

58. Dans la Multiplication, on cherche une grandeur qui soit au Multiplicande, comme le Multiplicateur est à l'unité, c'est-à-dire $1. a :: b. ab$; car les trois premiers termes $1, a, b$, sont donnés, & le quatrième sera $\frac{ab}{1} = ab$.

Au contraire, dans la Division le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité $ab. a :: b. 1$, c'est l'inverse de la Proportion précédente; ainsi la Multiplication & la Division sont deux règles de proportion dans lesquelles l'unité est un des termes.

Problème VII.

59. Partager une grandeur en plusieurs parties

qui soient proportionnelles à d'autres grandeurs données.

Règle.

- 1°. Ajoutez toutes les grandeurs données.
- 2°. Faites de cette somme le premier terme d'une Proportion.
- 3°. Mettez pour le second la grandeur qui doit être divisée.
- 4°. Prenez pour troisième terme une des quantités proposées.
- 5°. Faites autant de règles de proportion qu'il y a de grandeurs données.

E X E M P L E.

Soit f à partager en trois parties x, z, y , qui soient entre elles comme a, b, c .

On fera comme $a + b + c. f :: a. x = \frac{af}{a+b+c}$

De même comme $a + b + c. f :: b. y = \frac{bf}{a+b+c}$

De même comme $a + b + c. f :: c. z = \frac{cf}{a+b+c}$

Démonstration.

On a $a. x :: b. y$, puisque a & x , b & y sont entre eux comme $a + b + c$ & f , c'est-à-dire,

les produits abc , & dfg , forment un rapport composé $\frac{abc}{dfg}$.

Théorème VIII.

61. Un rapport composé a toujours pour exposant le produit des exposans de chacun des rapports simples.

$$\text{Soient les rapports simples} \dots \left\{ \begin{array}{l} a \& d = \frac{a}{d} \\ b \& f = \frac{b}{f} \\ c \& g = \frac{c}{g} \end{array} \right.$$

$$abc, dfg$$

L'exposant du produit des antécédens abc & des conséquens dfg , est égal au produit des exposans de a & d , de b & f , de c & g qui font les rapports simples.

Démonstration.

Soit le rapport de $\frac{a}{d} = q$; donc $qd = a$ (art. 23)

celui de $\dots \frac{b}{f} = p$; donc $pf = b$

celui de $\dots \frac{c}{g} = r$; donc $rg = c$

Donc $qdpfrg = abc$; donc $\frac{abc}{dfg} = \frac{qdpfrg}{dfg} = qpr$; (art. 23.); or qpr est le produit des exposans de chacun des rapports simples qui ont été proposés; donc, &c.

Corollaire.

Soient les deux rapports $x = \frac{ab}{c}$, & $z = \frac{fg}{d}$, on aura $x.z :: abd.fgc$; c'est-à-dire que les deux grandeurs x & z sont en raison composée directe des antécédens, & de la raison inverse des consé-

quens. Par l'Hypothèse $x. z :: \frac{ab}{c} \cdot \frac{fg}{d}$, en multipliant le second rapport $\frac{ab}{c} \cdot \frac{fg}{d}$ par les conséquens cd , on aura après la réduction $x. z :: abd. fgc$; or cette raison est composée de la directe ab , & fg , & de l'inverse d & c ; donc, &c.

DEFINITION IX.

62. Si l'on conçoit deux rapports égaux, le rapport composé qui en résulte est nommé *Rapport doublé*; de même si le rapport composé est formé de trois rapports égaux, il s'appelle *Rapport triplé*.

Soient deux Rapports égaux $a. b :: c. d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, le produit des antécédens ac , & celui des conséquens bd , s'appellera *Rapport doublé*, parce qu'il est composé de deux rapports égaux.

Soient les trois Rapports égaux $a. b :: c. d :: f. g$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, le produit des antécédens acf , & celui des conséquens bdg , se nommera *triplé*, parce qu'il est formé de trois rapports égaux.

Théorème IX.

63. Les produits qui sont en raison doublée, sont comme les quarrés de leurs racines, & les

pour exposant ; c'est-à-dire $\frac{ac}{bd} = qq$, (par l'art. 61)

or les quarrés des racines $\frac{aa}{bb}$, ou $\frac{cc}{dd}$ auront aussi qq pour exposant ; donc les produits qui sont formés de deux rapports égaux seront entr'eux comme les quarrés de leurs racines, ou $ac. bd :: aa. bb$. Il est facile d'appliquer la démonstration au rapport triplé.

Corollaire I.

64. Lorsque des produits ab , cd , & abf , cdg , ont leurs racines proportionnelles comme $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{f}{g}$, ce sont des *produits semblables* ; car puisqu'ils sont formés de deux ou de trois rapports égaux, ils ont leurs racines proportionnelles.

Corollaire II.

65. Si trois grandeurs a , b , c , sont en proportion continue, le premier terme a est au troisième comme le quarré du premier est au quarré du second ; car soit $\frac{a}{b} = q$; de même $\frac{b}{c} = q$; on aura (§ 61.) en prenant le rapport composé de ces deux rapports, celui de $\frac{ab}{bc}$, ou $\frac{a}{c} = qq$; pareillement le rapport composé de $\frac{aa}{bb} = qq$; donc ces deux rapports sont égaux, donc $a. c :: aa. bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut conclure de ce Corollaire que dans une suite de termes qui sont en proportion continue, le premier terme est au quatrième, comme le cube du premier est au cube du second ; c'est la même Démonstration.

En général, soit a le premier terme, b le second,

x le dernier terme, & n le nombre qui désigne la quantité des moyens proportionnels, on aura $a^{n+1}, b^{n+1} :: a, x$; c'est-à-dire que le premier terme (élevé à un degré plus grand de l'unité que le nombre qui exprime celui des moyens proportionnels) est au second élevé au même degré, comme le premier est au dernier; d'où l'on peut voir (art. 57.) que l'on aura la valeur du dernier terme de la progression, si le premier & le second sont donnés, avec le nombre des moyens proportionnels.

Corollaire III.

66. Le rapport $\frac{aa}{bb}$ étant un rapport doublé, celui de $\frac{a}{b}$ est dit sous-doublé, parce que c'est le rapport simple dont l'autre a été formé. En général $\frac{a^n}{b^n}$ est un rapport composé de plusieurs rapports égaux à celui de $\frac{a}{b}$, & d'autant de rapports que l'on conçoit d'unités dans l'exposant n . Celui de $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ est un rapport simple, dont $\frac{a}{b}$ est le rapport composé; car élevant $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ à la puissance n , on aura $\frac{a}{b}$, donc.

m , qui par la supposition n'est point un nombre quarré, le rapport simple $\frac{a}{b} = \sqrt{m}$, ne pourra être exprimé par un nombre, puisqu'un nombre qui n'est point quarré ne peut avoir de racine, ou ce qui est la même chose, est incommensurable; c'est le même raisonnement pour le rapport triplé & telle autre puissance qui doit avoir pour exposant un nombre qui soit d'un degré égal à celui du rapport proposé.

On peut déduire plusieurs Corollaires sur les rapports égaux, qu'il est aisé de trouver & qui suivent de ceux-ci.

Problème VIII.

68. Trouver une grandeur qui soit à une autre donnée en rapport composé de plusieurs quantités données.

Règle.

- 1°. Prenez le rapport composé des grandeurs données, ce qui se fait par la Multiplication. (61.)
- 2°. Faites une Règle de proportion dont le rapport composé fera les deux premiers termes, & la grandeur donnée le troisième terme.
- 3°. Le quatrième terme fera la grandeur cherchée.

E X E M P L E.

Soit la grandeur f qui doit être à x en rapport composé de $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{g}$.

le rapport composé fera bd, cg .

On dira comme $bd. cg :: f. x = \frac{fcg}{bd}$.

Démonstration.

La grandeur f est à $x :: bd$ est à cg ; or bd & cg sont (§ 61.) en raison composée des grandeurs don-

nées ; donc $\frac{f}{x}$ égal à $\frac{bd}{cg}$ est en raison composée de b, c , & de d, g .

Problème IX.

69. Partager une grandeur en plusieurs parties qui soient entre-elles en raison composée de plusieurs grandeurs données.

Règle.

- 1°. Prenez le rapport composé (61.)
- 2°. Ajoutez ensemble les deux termes du rapport composé.
- 3°. Opérez ensuite comme il est marqué à l'Article. (68.)

E X E M P L E.

Soit p qu'on veuille diviser en deux parties x & y , qui soient en raison composée de $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$

On prendra le rapport composé (61) bf & cg , lequel étant ajouté, on aura $bf + cg$, puis il faut dire :

$$\text{Comme } bf + cg. p :: bf. x = \frac{bfp}{bf + cg}.$$

$$\text{De même } bf + cg. p :: cg. y = \frac{cgp}{bf + cg}$$

Démonstration.

Problème X.

71. Ajouter deux ou plusieurs fractions.

Règle.

Ajoutez ces rapports ou fractions, en vous servant du signe $+$.

Soient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$, qu'on veut ajouter, on aura... $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g}$.

Problème XI.

72. Soustraire une fraction d'une autre fraction.

Règle.

Otez la fraction qui doit soustraire de celle qui doit être soustraite, en vous servant du signe $-$.

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ qu'on veut ôter de la fraction $\frac{c}{d}$, écrivez $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

Démonstration.

Le signe $+$ a été établi pour marquer l'Addition, & le signe $-$ pour faire la Soustraction, donc, &c.

Problème XII.

73. Multiplier deux ou plusieurs fractions l'une par l'autre.

Règle.

1°. Multipliez les numérateurs les uns par les autres, & vous aurez le numérateur du produit.

2°. Multipliez les dénominateurs les uns par les autres, & vous aurez le dénominateur du produit.

E X E M P L E.

Soient les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ à multiplier l'une par l'autre, on écrira $\frac{ac}{bd}$, & cette fraction sera le produit.

Démonstration.

Par la Remarque du Probl. 6^e. (58.) on sçait que dans toute multiplication, l'unité est au multiplicande comme le multiplicateur est au produit, ou $1. \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{c}{d} \cdot \frac{ac}{bd}$; or le produit des extrêmes $1 \times \frac{ac}{bd}$, ou $\frac{ac}{bd}$ est égal au produit des moyens qui est également $\frac{ac}{bd}$; donc $\frac{ac}{bd}$ est le quatrième proportionnel, ou le produit cherché.

Problème XIII.

74. Diviser une fraction par une autre fraction.

Règle.

- 1^o. Multipliez le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur de celle qui divise, & le produit sera le numérateur de la fraction.
- 3^o. Multipliez le dénominateur de la fraction à diviser par le numérateur de celle qui divise, & le produit sera le dénominateur de la fraction.

E X E M P L E.

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ à diviser par $\frac{c}{d}$.

On multipliera a par d , & b par c , & l'on aura $\frac{ad}{bc}$ pour le quotient.

Démonstration.

Dans toute Division il a été démontré par la Remarque du Probl. 6^e. (58) que le dividende est au diviseur comme le quotient est à l'unité, ou que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} \cdot 1$. Or le produit des extrêmes $\frac{a}{b} \times 1$, ou $\frac{a}{b}$ est égal au produit des moyens $\frac{adc}{cbd} = \frac{a}{b}$.

Pour diviser des fractions on dit qu'il faut les multiplier *en croix de saint André*. Voilà quelles sont les regles des simples fractions.

O P E R A T I O N D E S F R A C T I O N S
avec des grandeurs entieres.

Problème I.

75. Réduire un entier en fraction qui ait un dénominateur donné.

Règle.

Multipliez la grandeur donnée par le dénominateur proposé, & divisez le produit par le même dénominateur.

Soit proposé ab qu'il faut réduire à une fraction qui ait c pour dénominateur, on fera $ab \times c = abc$, qu'on divisera par c , & l'on aura $\frac{abc}{c} = ab$ grandeur donnée.

Démonstration.

On multiplie & on divise la grandeur donnée par la même quantité, donc elle ne change point de valeur.

Problème II.

76. Réduire des fractions à la même dénomination.

1°. Soit proposé les deux fractions $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, on fera $\frac{ad}{bd}$ en multipliant la première par d , & $\frac{bc}{bd}$ en multipliant la seconde par b , & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd} = \frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

2°. Soient ces fractions avec des grandeurs entières $a + \frac{ab}{c}$, & $b - \frac{ac}{c}$ à réduire à la même dénomination.

On fera d'abord par la Règle précédente (75),
 $a + \frac{ab}{c} = \frac{ac + ab}{c}$.

De même $b - \frac{ac}{b} = \frac{bb - ac}{b}$.

Et l'on aura $\frac{ac + ab}{c}$, & $\frac{bb - ac}{b}$.

Puis (par le premier article) on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre; on aura donc $\frac{acb + abb}{cb}$, & $\frac{bbc - acc}{cb}$, & ces deux fractions égales aux deux

Remarque.

77. Si l'on propose de multiplier ou de diviser des grandeurs entières avec des fractions, par des grandeurs entières & des fractions, voici la regle.

Règle.

réduisez tout en fractions, & faites ensuite l'opération comme il a été enseigné aux articles de la Multiplication, si vous voulez multiplier, & de la Division, si vous voulez diviser.

E X E M P L E.

Soit $a + \frac{aa}{b}$, & $b - \frac{cc}{d}$ qu'il faut multiplier l'un par l'autre, on fera 1°. $\frac{ab + aa}{b}$, puis $\frac{bd - cc}{d}$; 2°. on multipliera ensuite les numérateurs & les dénominateurs les uns par les autres, & l'on aura $\frac{bd + aabd - abcc - aacc}{bd}$ pour le produit total. Voilà pour la multiplication.

Et pour la Division vous réduirez les grandeurs données à la même préparation que $\frac{ab + aa}{b}$, & $\frac{bd - cc}{d}$, après quoi par les regles de la Division on aura $\frac{abd + add}{bbd - ccb}$ pour le quotient, en multipliant le numérateur de l'une par le dénominateur de l'autre.

Démonstration.

Ces opérations ont été démontrées, dans les articles précédens (73, 74.) & dépendent du même principe que l'on a plusieurs fois répété, qu'un rapport multiplié par la même grandeur ne change point de valeur.

Remarque.

78. Presentement qu'on sçait le Calcul des grandeurs entieres & des fractions, voici la méthode de faire une Division complexe composée de grandeurs entieres & de fractions, & dont le Diviseur est composé pareillement de fractions.

Soit proposé

$$\frac{1x^3}{3b} - \frac{5axx}{8b} + \frac{2}{3}ax + \frac{3aax}{1bb} - \frac{aa}{4} \bigg/ \frac{\frac{2}{3}x - \frac{14}{4}}{\frac{xx}{1b} - \frac{3ax}{4b} + a.} \quad \begin{array}{l} \text{Quotient:} \\ \text{div.} \end{array}$$

On dira $\frac{1x^3}{3b}$ divisé par $\frac{xx}{2b} = \frac{2bx^3}{3bx^2} = \frac{2}{3}x$.

On mettra donc $\frac{2}{3}x$ au quotient, on multipliera suivant les regles, ce quotient par tous les termes du Diviseur, & l'on aura $\frac{2}{3}x \times \frac{xx}{2b}$, ou

$$+ \frac{2x^3}{6b} = + \frac{1x^3}{3b}$$

De même $\frac{2}{3}x \times -\frac{3ax}{4b} = -\frac{6ax^2}{12b} = -\frac{1ax^2}{2b}$
 puis $\frac{2}{3}x \times a = \frac{2}{3}ax$.

Il faut ensuite soustraire ces termes $\frac{1x^3}{3b} - \frac{1ax^2}{2b}$

On continuera l'opération sur $-\frac{1ax^2}{8b} + \frac{3aax}{1bb}$
 $-\frac{aa}{4}$, & on trouvera que $-\frac{1ax^2}{8b}$ divisé par $\frac{xx}{2b}$
 $= \frac{2bax^2}{8bx^2} = \frac{1a}{4}$, qu'il faut mettre au quotient,
 le reste s'achevera comme il a été fait ci-dessus.

Corollaire.

79. On doit voir par cette Méthode qui ensei-
 gne à employer le calcul des fractions, qu'il n'y a
 point de division qui ne puisse être continuée à l'in-
 fini, quand même le Dividende & le Diviseur
 n'auroient point de grandeurs semblables; on le
 comprendra par les exemples qui suivent.

Soit à diviser a par $a + b$, on arrangera ainsi les
 termes

$$\begin{array}{r} a \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3}, \text{ \&c.} \\ \hline a + b \end{array} \right. \\ 0 \end{array}$$

1^{re}. reste $- b$

2^e. reste $+\frac{b^2}{a}$

3^e. reste $-\frac{b^3}{a^2}$

4^e. reste $+\frac{b^4}{a^3}$

En commençant la Division
 vous direz a divisé par a donne
 1 qui multiplié par $a + b$ donne
 $a + b$, lequel produit étant sou-
 strait du dividende a , il reste
 $-b$, on continuera la division
 sur $-b$ qui reste, & qui divisé

par a donne pour quotient $-\frac{b}{a}$, vous multi-
 plierez ce quotient par le diviseur, & vous ferez la
 Soustraction, vous parviendrez ainsi à de nouveaux
 restes sur lesquels on peut continuer à l'infini, &c.

divisera le second terme $-2x^2bc$ par $+2x^2$ double de la racine, on a pour quotient $-bc$ qui est la seconde racine, laquelle multipliée par $+2x^2$, & soustraite du second terme, il ne reste rien : prenez ensuite le quarré de cette seconde racine $-bc$ que vous ôterez du troisiéme terme, il ne restera rien, parce que la puissance est exacte, & vous aurez pour racine $x^2 - bc$.

Remarque premiere.

82. S'il y a des coefficients qui accompagnent les termes de l'Exemple proposé, il faut tirer la racine des coefficients.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} \text{Soit } 4b^4 - 12ab^2c + 9a^2c^2 \\ \quad - 4b^4 + 12ab^2c - 9a^2c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2b^2 - 3ac \\ 4b^2 \end{array} \right.$$

o o o

Pour extraire la racine quarrée de cette quantité complexe, on dira la racine de $4b^4$ est $2b^2$, car la racine de 4 est 2, & la racine de b^4 est b^2 , on prendra le double de cette racine qui est $4b^2$ par laquelle vous diviserez $12ab^2c$, & vous aurez pour la seconde racine $-3ac$, qui multiplié par $4b^2$, & le produit ôté du second terme, il ne reste rien ; vous acheverez en prenant le quarré de cette racine $-3ac = 9a^2c^2$ que vous ôterez de $9a^2c^2$, l'operation sera finie, & la puissance sera exacte.

Remarque seconde.

83. S'il y a plus de deux racines, trouvez les deux premieres par la méthode qui vient d'être enseignée, puis divisez les grandeurs qui suivent par le double des racines que l'on a trouvées, & le quotient

ent fera la troisiéme racine, ôtez ensuite le quarré
e cette troisiéme racine, ainsi de suite. Par exemple

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} 4b^4 - 12ab^2c + 9a^2c^2, + \\ 20b^2d^2 - 30acd^2 + 25d^4 \end{array} \right\} \overline{4b^2 - 6ac}$$

L'on a vû que les racines des trois premiers ter-
mes étoient $2b^2 - 3ac$ dont le double est $4b^2 - 6ac$, si l'on divise les termes suivans $20b^2d^2 - 30acd^2$ par le double de ces racines, on aura
le quotient $+5d^2$ pour troisiéme racine, & fai-
sant la multiplication & la soustraction, il ne restera
que $25d^4$ qui sera détruit par la soustraction du
quarré de $5d^2$ qui est également $25d^4$.

Démonstration de la Racine quarrée.

Il suffit d'élever $a + b$ à son quarré, qui est $aa + 2ab + bb$, & de remarquer que le premier
terme est le quarré de la premiere racine, que le
second exprime un produit composé du double de
la premiere racine par la seconde, & que le troi-
siéme terme est le quarré de la seconde racine: il s'en-
suit donc que dans l'extraction d'une racine quarrée,
il faudra ôter de semblables produits de la puissance
proposée; c'est pour cela qu'après avoir pris la ra-
cine quarrée du premier terme, on doit en soustraire
le quarré de cette racine, & que le second terme
étant un produit composé du double de la premiere
racine par la seconde, l'on divise ce même produit
par le double de la premiere racine, pour avoir la se-
conde; enfin le troisiéme terme de la puissance étant
le quarré de cette seconde racine, il faut soustraire
de ce même terme le quarré de la racine que la divi-
sion a fait découvrir. Il est donc clair que par cette
opération l'on ôte des produits semblables & en
même quantité de ceux que renferme la puissance
proposée; donc, &c.

Remarque troisième.

84. Si la puissance n'est pas exactement parfaite, il faut cependant agir de la même manière, mais il y aura alors des restes comme dans l'exemple qui suit : $cc + 2cd + dd + bf$, on trouvera que la racine est $c + d$, & qu'il reste $+ bf$. On suppose encore dans le problème, que la puissance est parfaite en partie, car on pourroit proposer telle quantité algébrique, comme $ab + cd + fg$, & une infinité d'autres, mais la règle qu'on vient d'enseigner n'auroit pas lieu, on se contente alors d'exprimer la racine par un signe de cette manière $\sqrt{ab + cd + fg}$, & lorsqu'on veut approcher de la racine ; (ce qui est la seule chose qu'on puisse faire, puisque la puissance est imparfaite) on a recours à quelques méthodes que l'on enseignera après l'extraction de la racine cube.

Problème VII.

85. Extraire la racine cube d'une quantité complexe.

Règle.

Après avoir ordonné les grandeurs proposées par rapport à une lettre, ainsi que dans la racine quarrée, l'on agira comme il va être enseigné.

Soit

$$\begin{array}{l} \text{1^{er} terme.} \quad \text{2^e.} \quad \text{3^e.} \quad \text{4^e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b \text{ Racine.} \\ 3a^2 = 3 \times a^2 \text{ diviseur.} \\ 3ab^2 = 3a \times b^2 \text{ produit.} \\ b^3 \text{ cube de la seconde.} \end{array} \right. \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

On dira la racine cube de a^3 est a qu'on placera à la racine, laquelle élevée au cube & ôtée du premier terme il ne reste rien ; il faut prendre le quarré de cette racine & le tripler, ce qui donne

$3a^2$, après quoi vous diviserez le second terme $3a^2b$ par ce produit, le quotient qui est b fera la seconde racine, & ce second terme s'évanouira par la multiplication & la soustraction; vous prendrez ensuite le triple de la première racine $3a$ que vous multipliez par le carré de la seconde racine, & vous aurez $3ab^2$; enfin prenez le cube de cette seconde racine qui est b^3 , & soustrayant ces deux produits l'un du troisième & l'autre du quatrième terme, il ne restera rien, & la racine de la puissance est $a + b$.

Remarque première.

86. Si les termes de la grandeur proposée ont des coefficients, il faut y avoir égard, & extraire la racine cube de la grandeur numérique comme de la grandeur littérale.

Soit

$$\begin{matrix} 1^{\text{er}} & 2^{\text{e}} & 3^{\text{e}} & 4^{\text{e}} \\ 8a^3 & -36a^2b & +54ab^2 & -27b^3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 2a-3b \text{ Racine.} \\ +12a^2 \text{ Divis. } = 3 \times 4a^2 \end{array} \right.$$

On dira la racine cube de $8a^3$ est $2a$, parce que la racine cube de a^3 est a , & celle de 8 est 2. Pour avoir la seconde racine, vous prendrez le triple du carré de cette première racine qui est $12a^2$, parce que le carré de a est a^2 , & le carré de 2 est 4 dont le triple est 12, vous diviserez le second terme $-36a^2b$ par $+12a^2$, & le quotient qui est $-3b$ sera la seconde racine; vous multipliez ensuite, comme on l'a dit dans la règle, le triple de la première par le carré de la seconde, & vous aurez $6a \times 9b^2$, ou $54ab^2$, que vous soustrairez du troisième terme, enfin prenez le cube de la seconde ra-

triple du carré de la 1^{re}
 $6a \times 9b^2 = 54ab^2 = 3 \times 2a$
 triple de la prem. par le
 carré de la sec. $= 9b^2$
 $-27b^3$, cube de la se-
 conde.

cine qui est $-27b^3$ que vous ôterez du quatrième il ne restera rien.

Remarque seconde.

87. Si la grandeur proposée a plus de deux racines, la règle est la même, il faut seulement faire attention que les deux premières racines doivent être regardées comme n'en faisant qu'une, c'est-à-dire qu'il faut diviser les termes qui suivent par le triple du carré des deux premières racines, pour avoir la troisième, puis soustraire le triple des deux premières racines par le carré de la troisième; ensuite ôter le cube de la troisième, ainsi de suite. Cette Remarque renferme la règle générale pour l'extraction de la racine cube.

Soient proposés les termes qui suivent.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \\ + 60a^2c - 180abc + 135b^2c \\ + 150ac^2 - 225bc^2 + 125c^3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2a - 3b + 5c \text{ Racine} \\ \hline 3 \times (4a^2 - 12ab + 9b^2) \\ \text{OU } 12a^2 - 36ab + 27b^2 \\ \text{Triple du carré des deux premières racines.} \\ 3 \times (2a - 3b) \times 25c^2 \\ 150a^2c - 225bc^2 \\ \text{Triple des deux premières par le carré de la troisième.} \end{array} \right.$$

Les quatre premiers termes ont pour racine $2a - 3b$ comme on l'a vu ci-dessus, il faut donc suivant la règle, diviser le terme qui suit $60a^2c$, &c. par le triple du carré des deux premières racines $2a - 3b$ qui est $12a^2 - 36ab + 27b^2$, & l'on aura pour troisième racine $+5c$ qui multiplié par ce diviseur, & le produit étant soustrait, les trois termes contenus dans la seconde ligne s'évanouiront. Si l'on prend le produit du triple des deux premières racines par le carré de la troisième, plus le cube de la troisième, & qu'on fasse la Soustraction, les trois derniers termes qui restent s'effaceront, & l'opération sera finie.

Remarque troisième.

88. On a coutume de prendre le cube a^3 $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour formule, & de s'en servir dans ces opérations comme d'un guide, en supposant que a représente la première racine, & b la seconde lorsqu'on n'en cherche que deux, & après l'extraction de ces deux premières, la même lettre a représentera les deux premières racines, & b la troisième, en sorte que les produits $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, désignent toujours ceux qu'il faut former; de manière que le terme $3a^2b$ signifie tantôt le triple du carré de la première, ou des deux premières, ou des trois premières racines par la seconde, ou la troisième, ou la quatrième racine, &c. C'est le même raisonnement & la même idée qu'il faut appliquer à la signification des autres termes.

Démonstration.

La puissance de $a + b$ élevée au cube donne $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; or cette puissance qui a deux racines est composée du cube de la première; plus d'un produit fait du triple du carré de la première par la seconde; plus d'un autre produit fait du triple de la première par le carré de la seconde; & du cube de la seconde; donc on aura trouvé les racines de la puissance proposée, si on ôte ces mêmes produits l'un après l'autre des termes semblables de la puissance proposée. Ce que l'on a fait par l'opération, & ce que la règle apprend à exécuter.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRE'E

dont on ne peut avoir la Racine exacte,

& que l'on continue à l'infini.

89. Soit $\sqrt{c^2 - x}$ quantité irrationnelle dont il

faut tirer la racine approchée, on fera l'opération comme si la quantité étoit commensurable.

$$\begin{array}{l}
 c^2 - x \left\{ \begin{array}{l} c - \frac{x}{2c} - \frac{xx}{8c^3} - \frac{x^3}{16c^5} \\ 2c \text{ 1}^{\text{er}} \text{ diviseur.} \\ 2c - \frac{x}{c} \text{ 2}^{\text{e}} \text{ diviseur.} \\ 2c - \frac{c}{x} - \frac{xx}{4x^3} \text{ 3}^{\text{e}} \text{ divif.} \end{array} \right. \\
 1^{\text{er}} \text{ reste} = \frac{xx}{4c} \\
 2^{\text{e}} \text{ reste} = \frac{x^3}{8c^4} - \frac{x^4}{64c^6} \\
 3^{\text{e}} \text{ reste} = \frac{3x^4}{84c^6} - \frac{x^5}{64c^8} - \frac{x^6}{256c^{10}}
 \end{array}$$

On commencera en disant la racine quarrée de c^2 est c qu'il faut écrire à la racine, & effacer le premier terme, & suivant la regle il faut doubler la racine qui sera $2c$ pour être le diviseur, & l'on dira $-x$ divisé par $2c$, donne pour seconde racine $-\frac{x}{2c}$ dont le quarré est $+\frac{xx}{4c^2}$ qu'on doit soustraire, mais comme il n'y a point de termes semblables on change le signe en écrivant $-\frac{xx}{4c^2}$, & c'est un reste sur lequel on continue l'extraction en doublant les deux racines trouvées, ainsi que la regle générale le prescrit, on aura donc $2c - \frac{x}{c}$, puis on divisera le premier reste $-\frac{xx}{4c^2}$ par $2c - \frac{x}{c}$

grandeur proposée. On a coutume de s'arrêter & de négliger ces restes après un nombre suffisant d'opérations.

Remarque.

90. Si la quantité proposée a plusieurs termes il faudra opérer de la même manière ; il est seulement nécessaire que le premier terme soit une quantité quarrée , mais à la fin de ce Traité on donnera le moyen de tirer la racine indépendamment de cette supposition.

EXTRACTION D'UNE RACINE CUBE IMPARFAITE & continuée à l'infini.

91. Soit $\sqrt[3]{8a^3 - b^2}$ quantité incommensurable dont l'on veut trouver la racine approchée.

$$8a^3 - b^2 \left\{ \begin{array}{l} 2a - \frac{b^2}{12a^2} \\ \hline 12a^2 \quad 1^{\text{er}} \text{ diviseur} \end{array} \right.$$

$$\text{reste} = -\frac{b^4}{24a^3} + \frac{b^6}{1728a^6}$$

On dira la racine cube de $8a^3$ est $2a$ que vous poserez à la racine ; pour avoir la seconde racine vous diviserez ainsi que la règle l'ordonne $-b^2$ par $12a^2$ qui est le triple du quarré de la première , & vous aurez $-\frac{b^2}{12a^2}$ pour la seconde racine, puis

prenant le triple de la première que vous multiplierez par le quarré de la seconde , vous aurez $6a \times$

$$\frac{b^4}{144a^4} = \frac{6ab^4}{144a^4} = \frac{b^4}{24a^3} ; \text{ il faut prendre en-}$$

suite le cube de cette seconde racine , qui est $-\frac{b^6}{1728a^6}$, & les signes étant changés , vous aurez le

premier reste sur lequel on opérera en le divisant

par le triple du quarré des deux premiers avoir une troisième racine, &c.

Enfin ces extractions ne diffèrent point de celles qui sont composées de grandeurs entières, avoir égard au Calcul des fractions, c'est la même attention qu'il faut avoir ; il est nécessaire que le premier terme soit une quantité exactement cubique, la méthode que l'on donnera à la fin de ce chapitre ne le suppose pas.

Remarque premiere.

92. Dans le calcul de ces suites, il n'est différent en commençant l'opération de choisir le premier terme celui qu'on voudra, il faut choisir celui qui donnera les plus petites différences qu'on l'a déjà fait remarquer dans la suite de la division infinie (§. 80.), & pour la même raison aura de cette manière la valeur la plus approchée & elle différera si peu que l'on souhaitera, continuant l'opération.

Remarque seconde.

93. Voilà à quoi se réduit le calcul dont on a besoin sur ces suites, il suffira de percevoir comment il faudroit agir pour le calcul de l'expression qui suit.

Soit $\sqrt[3]{cc + ab}$ on demande la valeur

fractions l'on se borne à un certain nombre de termes. On laisse cet exemple à faire pour s'exercer.

Remarque troisième.

94. Lorsqu'une quantité, soit littérale, soit numérique, n'est pas une puissance parfaite, il est impossible qu'aucune suite infinie puisse donner une racine exacte ; car dès que la puissance supposée imparfaite n'a pas une grandeur entière pour sa racine, elle ne pourroit avoir qu'une fraction ; or une fraction réduite aux moindres termes & multipliée par elle-même ne peut produire qu'une fraction & jamais une grandeur entière ; car soit $\frac{a}{b}$ une fraction, ou le moindre rapport, son carré $\frac{aa}{bb}$ qui est doublé n'aura pour exposant qu'une fraction, & non pas un nombre entier, sans quoi s'il étoit nombre entier, il seroit aussi nombre carré, & alors l'exposant du rapport simple ne seroit plus une fraction, mais un nombre entier, ce qui est contre l'hypothèse. On se contente donc d'en approcher par le moyen des décimales pour les nombres, comme on l'a enseigné, (§ 20.) & par les suites pour les quantités littérales.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

DEFINITION. XI.

95. On a dit qu'une quantité irrationnelle étoit une puissance dont la racine n'est point exacte ; ainsi $\sqrt[3]{b}$, ou $\sqrt[3]{ab}$, est une quantité irrationnelle. On a dit encore que ce signe $\sqrt{}$ avoit été inventé pour marquer la racine de la grandeur qui est sous le signe

mettant au haut du signe radical un chiffre qui marque le degré de la puissance qu'on veut extraire, mais on trouve souvent des grandeurs numériques ou algébriques qui accompagnent ces signes radicaux, de cette manière : $3\sqrt{ab}$, ou $m\sqrt{b}$, ou $\frac{p}{q}\sqrt{bd}$, ou $b+f-g\sqrt{abc}$. Ces grandeurs qui

accompagnent les signes radicaux, sont censées être multipliées par celles qui sont sous le signe radical.

Avant que d'en venir aux opérations que l'on a coutume de pratiquer sur ces grandeurs numériques ou littérales qui accompagnent ces signes radicaux, il faut expliquer quelques réductions qui sont déduites de cette définition.

On dit par exemple $\sqrt[3]{9ab} = 3\sqrt[3]{ab}$, parce que qu'on tire la racine de 9 qui est sous le signe radical, & on place 3 qui est sa racine hors du signe radical. De même $\sqrt[3]{72a^3d} = 2a\sqrt[3]{18d}$ parce que cette expression peut se décomposer en celle-ci $\sqrt[3]{4a^3 \times 18d}$; or il y a sous ce signe une partie du produit qui est une quantité parfaite, savoir $4a^3$ dont la racine est $2a$; on pourra donc la mettre hors du signe radical de cette manière $2a\sqrt[3]{18d}$; ainsi ces deux expressions $\sqrt[3]{72a^3d}$, & $2a\sqrt[3]{18d}$ sont égales: la même expression $\sqrt[3]{72a^3d}$ auroit pu se changer en cette autre $6a\sqrt[3]{2d}$, parce que $\sqrt[3]{72a^3d}$ peut être décomposée en celle-ci $\sqrt[3]{36a^3 \times 2d} = 6a\sqrt[3]{2d}$. Il est nécessaire pour faire ces changemens que la quantité qui est sous le signe radical puisse se décomposer en deux membres dont les produits fassent la grandeur proposée, & que l'un des deux soit une puissance parfaite, comme il est facile de le remarquer dans cet exemple & dans celui qui suit.

$$\frac{\sqrt{8bbac}}{\sqrt{4ccb}} = \frac{\sqrt{4bb \times 2ac}}{\sqrt{4cc \times b}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}}$$

S'il arrive au contraire qu'on ait une grandeur numérique ou littérale qui accompagne le signe radical, & qu'on veuille la faire passer sous le signe : on élèvera cette quantité à la puissance exprimée par l'exposant du signe radical, comme si l'on a $2c\sqrt{ab}$, on aura $\sqrt{4abcc} = 2c\sqrt{ab}$, en élevant $2c$ au carré, & on fera ensuite passer $4cc$ sous le signe ; de même $3d\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{27abd^3}$, parce qu'on a élevé $3d$ au cube, il en est ainsi des autres quantités.

Par ces deux changemens, l'un de tirer hors du signe les grandeurs qui sont dessous, & l'autre de les faire passer sous le même signe radical, on simplifie la plupart des opérations qui se font sur les radicaux, & qu'on trouve dans l'usage de l'Analyse.

De maniere qu'on doit voir que $\sqrt{\frac{bbd}{c}} = b\sqrt{\frac{d}{c}}$

& que $\sqrt{\frac{aab}{cc}} = \frac{a}{c}\sqrt{b}$, & que cette expression

$\frac{\sqrt{b}}{c} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{cc}}$, & par conséquent elle est la même

que celle-ci $\sqrt{\frac{b}{cc}}$, qu'enfin $\sqrt{\frac{abb}{c} + m} =$

$b\sqrt{\frac{a}{c} + m}$, ou $b\sqrt{\frac{a + mc}{c}}$

ADDITION ET SOUSTRACTION DES QUANTITE'S irrationnelles, & qui ont le même signe radical.

Regle pour l'Addition.

96 Ecrivez de suite les grandeurs avec leurs signes, & si elles sont semblables, faites la réduction.

Soit $2a\sqrt{b}$, qu'il faut ajouter avec $3a\sqrt{b}$, on écrira $2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{b} = 5a\sqrt{b}$.

Pour ajouter $b\sqrt{ax}$ avec $a\sqrt{bc}$, on écrit de suite $b\sqrt{ax} + a\sqrt{bc}$, parce que les grandeurs ne sont point semblables.

Règle pour la Soustraction.

97. Ecrivez de suite les grandeurs, en changeant les signes de celles qui doivent être soustraites, & faites la réduction s'il y a des grandeurs semblables.

Soit $3c\sqrt{bd}$, dont il faut soustraire $2c\sqrt{bd}$, on écrira $3c\sqrt{bd} - 2c\sqrt{bd} = 1c\sqrt{bd}$.

Pour soustraire $-2b\sqrt{ax}$ de $5b\sqrt{ax}$, on écrira $+5b\sqrt{ax} + 2b\sqrt{ax} = 7b\sqrt{ax}$.

On doit se rappeler qu'il faut changer les signes de la grandeur qui soustrait.

Enfin $3bd\sqrt{mn}$ dont on veut ôter $2f\sqrt{pg}$, on écrira $3bd\sqrt{mn} - 2f\sqrt{pg}$.

MULTIPLICATION ET DIVISION des Quantités irrationnelles qui ont le même signe radical.

Règle pour la Multiplication.

98. Multipliez toutes les grandeurs qui composent une des quantités irrationnelles par celles qui composent l'autre quantité irrationnelle, c'est-à-dire multipliez celles qui sont hors du signe radical les unes par les autres, ainsi que celles qui sont dessous le signe radical, & observez la règle des signes $+$ & $-$, & réduisez le produit total à l'expression la plus simple.

L I T T E R A L. 141

Soit $+2a\sqrt{b} \times +2b\sqrt{c}$, on multipliera les grandeurs qui sont hors du signe, sçavoir $2a$ par $2b$, ce qui donne $4ab$, & celles qui sont sous le signe radical l'un par l'autre, ce qui donne \sqrt{bc} ; le produit total sera donc $4ab\sqrt{bc}$.

De même $+2a\sqrt{bc} \times -b\sqrt{ab} = -2ab\sqrt{abbc}$, où l'on peut remarquer que bb qui est sous le signe radical est un quarré; on peut donc le retirer du signe radical, & l'on aura $-2ab\sqrt{abbc} = -2abb\sqrt{ac}$ qui lui fera égal.

Soit $a + \sqrt{cd}$,
à multiplier par $b + f\sqrt{dg}$,
on aura $(ab + b\sqrt{cd} + af\sqrt{dg} + f\sqrt{cddg})$

Soit $c - \sqrt{c}$
à multiplier par $-bc + \sqrt{d}$
on aura $(-bcc + bc\sqrt{c} + c\sqrt{d} - \sqrt{dc})$

Soit proposé $+ \sqrt{\frac{cd}{a}} \times -b\sqrt{\frac{ab}{f}}$, on aura en réduisant $-b\sqrt{\frac{bcd}{f}}$, & si l'on avoit à multiplier $\sqrt{\frac{b}{a}}$ par $\frac{\sqrt{b}}{a}$, on feroit $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b}{aa}}$, & l'on auroit en multipliant $\sqrt{\frac{bb}{aaa}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$ en faisant la réduction.

Remarque.

99. Il est évident que si l'on proposoit $\sqrt{aa+bb}$ à multiplier par $\sqrt{aa+bb}$, il suffiroit d'effacer le signe radical & d'écrire $aa+bb$, puisque cette quantité est multipliée par elle-même, le signe radical doit donc s'évanouir.

Démonstration.

Dans toute multiplication de $a \times b = ab$, on a
 1. $a :: b. ab$; donc $\sqrt{1} \cdot \sqrt{a} :: \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab}$; donc
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Règle pour la Division.

100. Il faut écrire le Dividende au-dessus du Divi-
 seur, & si la Division peut se faire, on agira
 comme dans les grandeurs rationnelles, on aura
 pareillement égard aux signes $+$ & $-$ qui ac-
 compagnent les radicaux.

Soit \sqrt{b} à diviser par \sqrt{c} , on écrira $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$.

Soit \sqrt{ab} à diviser par $-\sqrt{ac}$, on écrira $-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}}$
 $= -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, en effaçant ce qui se détruit, & donnant
 le signe $-$ au quotient.

De même $ac\sqrt{bc}$ à diviser par $a\sqrt{b}$, on écrira
 $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{1}} = c\sqrt{c}$ par réduction.

Enfin $\frac{12ac\sqrt{dc}}{4c\sqrt{bc}} = \frac{3a\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$, & pour diviser une
 quantité qui viendrait sous cette expression $\frac{a}{\sqrt{a}}$,
 on fera $a = \sqrt{a^2}$, on aura $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a^{2-1}} (38)$

Remarque pour le Calcul des Radicaux.

■ 01. S'il arrive que les exposans des radicaux ne soient pas les mêmes comme $\sqrt[3]{bf}$, & $\sqrt[3]{ad}$, & qu'on propose de les multiplier ou diviser, on ne peut le faire qu'on n'ait donné auparavant les mêmes exposans aux signes radicaux, ce qu'on fait en cette manière.

Règle.

Multipliez les exposans l'un par l'autre, & élevez la puissance de l'un au degré marqué par l'exposant de l'autre ; ainsi $\sqrt[3]{b}$ & $\sqrt[3]{c}$ qui ont des exposans différens étant proposées, si l'on multiplie les exposans des signes radicaux l'un par l'autre, on aura $2 \times 3 = 6$, & on élèvera $\sqrt[3]{b}$ à la troisième puissance, c'est-à-dire au degré indiqué par l'exposant de l'autre signe radical, & il viendra $\sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{b}$, pareillement $\sqrt[3]{c}$ étant élevée au carré, on aura $\sqrt[3]{cc} = \sqrt[3]{c}$, par conséquent $\sqrt[3]{b^3} \times \sqrt[3]{cc} = \sqrt[3]{b^3cc}$, ce qui fait rentrer dans la règle générale.

S'il falloit diviser des grandeurs incommensurables qui n'eussent pas le même signe, il faudroit commencer par faire cette préparation, puis opérer comme lorsque les grandeurs ont le même signe ; c'est pourquoi $\sqrt[3]{b}$ étant divisée par $\sqrt[3]{c}$, on aura après la préparation $\frac{\sqrt[3]{b^3}}{\sqrt[3]{cc}}$; il en est ainsi des signes radicaux qui peuvent avoir des exposans plus élevés, & renfermer des quantités plus composées.

Démonstration.

Ces expressions $\sqrt[2]{b}$, ou $\sqrt[6]{b^3}$ sont égales ; car $\sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}$ (44) ; de même $\sqrt[6]{b^3} = b^{\frac{3}{6}} = b^{\frac{1}{2}}$, donc, &c.

Remarque sur les radicaux complexes.

102. Cette dernière Remarque, va servir à entendre quelques réductions que l'on fait sur les radicaux, & qui sont un peu plus composées que les précédentes.

Soit proposé à réduire au même exposant les radicaux $a\sqrt[3]{cc-dd}$ & $b\sqrt[3]{ab+dd}$ on multipliant suivant la règle les exposans des radicaux l'un par l'autre, ce qui donne 6 pour l'exposant radical, puis on élèvera la première racine au cube, & la seconde au quarré; on aura donc $a\sqrt[6]{cc^3-dd^3}$ & $b\sqrt[6]{ab^3+dd^3}$ (pareillement $b\sqrt[6]{ab+dd^2}$ & $a\sqrt[6]{cc+dd^2}$).

Si on élève ces grandeurs aux puissances marquées par leurs exposans, on doit appercevoir qu'elles pourront être multipliées, ou divisées l'une par l'autre. On rentrera de cette manière dans la règle générale.

Si on proposoit de réduire une grandeur complexe telle que celle qui est sous ce signe radical $a\sqrt[6]{(ccb^2-2cb^3+c^4)}$ on remarquera que la grandeur qui est sous ce signe radical, est le quarré de $cb-cc$; donc si l'on tire la racine quarrée de cette grandeur complexe, il faudra diviser l'exposant du signe radical par 2, & on aura alors $a\sqrt[3]{cb-cc}$ $= a\sqrt[6]{(ccb^2-2cb^3+c^4)}$. La démonstration de l'égalité de ces deux expressions, ainsi que celle de ses semblables plus ou moins composées, suit de ce que $\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a^2}$ (§. 44.)

On pourroit pousser plus loin la théorie du calcul des radicaux, ou des grandeurs irrationnelles ; mais ce qu'on vient d'en donner suffit pour un abrégé tel que celui-ci : les personnes curieuses d'approfondir cette matiere trouveront de quoi se satisfaire dans les nouveaux *Éléments d'Algebre* ou du *Calcul Littéral* que M. le Blond, Maître de Mathématique des Enfants de France, vient de mettre au jour en un volume in-8°.

Fin de l'Algebre ou Calcul Littéral.

ARITHMÉTIQUE

PALPABLE.

Par le Docteur SAUNDERSON.

C'EST une chose aussi merveilleuse que certaine, que le savant & ingénieux Docteur Saunderson, feu Professeur Lucasien pour les Mathématiques dans l'Université de Cambrigde, malgré son aveuglement, ait été capable cependant de faire des calculs arithmétiques & algébriques fort longs & très compliqués. Cela paroît sans contradiction par son chef-d'œuvre d'algebre qu'on vient d'imprimer, & par les autres monuments indubitables qui existent encore. Il avoit inventé pour son usage une façon de marquer très commode pour les longs calculs & les nombres considérables, qu'il savoit exprimer sur une planchette, ou table à calculer, avec laquelle il pouvoit faire

Tome I.

K

aisément toutes les opérations de l'arithmétique, par le seul sens du toucher, ce qui fait que nous l'appellons *Arithmétique palpable*. Comme par le moyen de Madame Saunderson j'eus la facilité de voir & d'examiner divers modèles de cette espèce d'arithmétique, qu'il avoit par bonheur perfectionnée avant sa mort, quoiqu'il n'eût laissé aucun éclaircissement là-dessus qui puisse servir à découvrir sa méthode, j'ai cependant eu la curiosité de me proposer à moi-même de déchiffrer, pour ainsi dire, ses modèles; heureusement j'en suis venu à bout. Comme d'autres pourroient avoir la même curiosité, & que d'ailleurs cette méthode peut être d'une grande utilité aux personnes qu'un pareil malheur mettroit dans le même cas, j'en donnerai une description exacte & succincte.

La table calculatoire étoit une planche d'un bois mince & poli, un peu plus grande qu'un pied en quarré: elle étoit élevée sur un petit châssis ou pied, de façon qu'on en pouvoit toucher également le dessus & le dessous. Cette planche étoit divisée par un grand nombre de lignes parallèles à égale distance, & par un pareil nombre d'autres faisant un angle droit avec les premières. Les bords de cette table étoient divisés par des entailles, environ à la distance d'un demi-pouce l'une de l'autre, & chaque entaille comprenoit cinq des parallèles susdites, de façon que chaque pouce quarré étoit divisé en cent petits quarrés. A chaque point d'intersection la planche étoit percée par de petits trous capables de recevoir une épingle. C'étoit par le secours de ces épingles, fichées jusqu'à la tête dans ces trous, qu'il exprimoit les nombres. Il employoit deux sortes d'épingles, des grosses & des petites, au moins leur tête étoit-elle diffé-

rente, & pouvoit aisément se distinguer par le toucher. Toutes les pointes de ces épingles étoient coupées, & il en avoit une grande provision dans deux boîtes qu'il avoit toujours à côté de lui quand il calculoit. Tels étoient, ses instruments dont nous allons présentement faire voir l'usage.

Pour cet effet nous observerons d'abord que Fig. 1^{re}. chaque figure numérale avoit sur cette table son petit carré particulier, consistant en quatre de ces petits carrés contigus dont nous venons de parler, lesquels par conséquent laissoient un petit intervalle entre chaque figure; & ces figures numérales étoient de différente valeur, suivant la différente grosseur, ou la position d'une ou de deux épingles, dont elles étoient toujours composées. Dans cette intention il avoit imaginé l'analogie ou façon de marquer suivante, qu'il observoit toujours soigneusement.

Une grosse épingle dans le centre du carré (elle Fig. 2. ne se plaçoit jamais ailleurs que dans chaque centre) marquoit toujours un zéro, ou 0; c'est pourquoi je l'appellerai dorénavant ainsi. Son principal emploi étoit pour conserver l'ordre & l'égalité de distance entre chaque rang de chiffres. Ce zéro étoit toujours présent, excepté dans le seul cas de l'unité. Alors pour l'exprimer on ôtoit la grosse épingle du centre, & l'on y en substituoit une petite. Pour le 2, on remettoit d'abord le zéro à sa place & l'on plaçoit la petite épingle précisément au-dessus du zéro. Pour le 3, le zéro restoit à sa place, & l'on avançoit la petite épingle à droite dans l'angle supérieur. Pour le 4, la petite épingle descendoit, & se plaçoit justement vis-à-vis du zéro à droite. Pour le 5, la petite épingle descendoit, & étoit placée à l'angle d'en bas, toujours à

K ij

droite. Pour le 6, la petite épingle reculoit à gauche, & venoit se placer perpendiculairement sous le zéro. Pour le 7, la petite épingle reculoit encore à gauche, & se plaçoit dans l'angle inférieur. Pour le 8, la petite épingle remontoit, & se mettoit justement vis-à-vis du zéro à gauche. Pour le 9 enfin, la petite épingle remontoit encore jusqu'à l'angle supérieur du zéro, toujours à gauche. C'est ainsi qu'il arrangeoit ses chiffres par une façon de marquer uniforme & naturelle, qui pouvoit fort bien s'appercevoir & se distinguer au toucher; & pour faire comprendre plus distinctement l'arrangement de ces chiffres, je les ai représentés dans la figure premiere & dans la seconde.

De cette maniere il pouvoit coucher par écrit (pour ainsi dire) sur sa table quelque nombre que ce fût; & en promenant légèrement ses doigts dessus, il pouvoit y lire aisément, & connoître ce qui y étoit représenté. Les grosses épingles ou zéro qui restoient toujours au centre de chaque carré, assez proches & à égale distance les unes des autres, étoient des guides sûrs qui servoient à le conduire le long de chaque rang, en assuroient les limites, & prévenoient la confusion qui sans cela auroit pu survenir parmi les chiffres. Comme trois paralleles perpendiculaires suffisoient pour chaque chiffre, de même trois paralleles horizontales suffisoient pour un rang de chiffres, & les trois au-dessous pour un autre rang, & ainsi de suite, sans aucun danger de s'embrouiller.

Présentement il n'est pas difficile de concevoir comment il pouvoit avoir plusieurs rangs de chiffres en même temps sur sa table, l'un dessous l'autre, ou comment il pouvoit faire dériver un nombre d'un autre; en un mot, comment il pouvoit

faire tous les calculs nécessaires , en changeant les épingles de place , ce qu'il faisoit avec une adresse & une facilité si grande , que cela cauſoit une ſurpriſe agréable à ceux qui le regardoient. On dit même qu'il pouvoit quitter au milieu d'un calcul trop long , & ſ'y remettre quand il lui plaſoit , & qu'il en appercevoit tout d'un coup les conditions en promenant les doigts ſur ſa table. Voici un expédient fort naturel qui auroit pu lui abrégér beaucoup ſes opérations , ſur-tout dans les grands calculs , c'eſt pourquoi je ne doute nullement qu'il n'y ait eu ſouvent recours. C'eſt de préparer ſa table avant d'opérer , (ce qu'il pouvoit faire faire par tout autre que lui ,) en rempliſſant chaque troiſième trou , de trois en trois lignes , avec une groſſe épingle ou zéro ; alors quand il vouloit travailler , il n'y avoit pas autre choſe à faire que de déterminer chaque chiffre en ajoutant une petite épingle dans l'endroit convenable ; il n'y avoit (comme l'on a dit) que le ſeul cas de l'unité à exprimer , qui pouvoit l'obliger alors de changer la groſſe épingle , ou zéro , en une petite , pour marquer cette unité.

Les modèles de cette arithmétique que j'ai examinés & réduits aux chiffres ordinaires , ſont aſſurément des tables arithmétiques qu'il avoit calculées , & qu'il conſervoit pour ſon uſage. Mais de ſavoir à quel deſſein elles ont été faites , c'eſt ce qu'ils n'eſt pas aisé de découvrir. Elles paroiſſent avoir beaucoup de rapport avec les tables des ſinus naturels , tangentes & ſécanes ; mais je laiſſe aux recherches des curieux de trouver leur véritable uſage. Ce ſont quatre pièces d'un bois ſolide de la forme d'un parallépipède rectangle , chacune longue environ de 14 ppuces , de 5 & demi de

Fig. 3.

large , & d'un peu plus d'un demi-pouce d'épais. Les deux côtés opposés de chaque piece étoient divisés par des petits quarrés , suivant la méthode de la table décrite ci-dessus ; mais elles n'étoient trouées que dans les places nécessaires où les épingles étoient enfoncées à demeure jusqu'à la tête. Chaque face représentoit neuf petites tables arithmétiques de 10 rangs de chiffres chacune, & chaque rang de chiffres, pour l'ordinaire, contenoit cinq figures ou chiffres. Pour faire plaisir aux curieux , j'ai dessiné en grand une de ces petites tables comme je l'ai trouvée , avec l'interprétation que je lui donne. Voyez la figure 3.

Mais outre l'usage arithmétique de cette table, qui étoit sans contredit sa première & sa principale destination , il s'en servoit encore pour décrire de fort belles figures géométriques , qui consistoient en plusieurs lignes droites qui s'entrecoipoient à divers endroits , comme j'en ai vu quelques exemples. Il avoit deux façons de les tracer, soit en mettant les épingles sur les lignes , pour en représenter la figure , soit par des épingles placées seulement aux intersections de chaque ligne. Alors entortillant un brin de fil ou de soie autour de la tête de l'épingle , il pouvoit aisément représenter avec ce fil les lignes suivant son intention. S'il avoit aussi des lettres palpables , semblables à peu près aux caracteres d'imprimerie , pour distinguer les différents points angulaires , & pour lui aider dans la démonstration des propriétés de ces figures, c'est ce qu'on ne peut savoir à présent. S'il avoit eu besoin de pareils secours , son génie fertile y auroit aisément suppléé. Il n'est pas difficile de concevoir pareillement comment il pouvoit aussi se servir de la même table pour repré-

senter toutes sortes d'équations algébriques, & pour réduire ces équations, principalement en se servant des caracteres dont je viens de parler, ou de quelque chose de semblable. Il pouvoit avoir des caracteres dans la façon de ces épingles pour les signes ordinaires de l'algebre, & pour placer dans chaque opération. Ainsi cette table auroit ressemblé assez bien à une forme d'imprimerie, & je ne doute pas qu'il n'ait pu la lire par le seul toucher, pour peu qu'il eût voulu s'y appliquer. On m'a assuré qu'il connoissoit ses lettres, & qu'il savoit épeler, de façon qu'il distinguoit les figures de chaque lettre, soit capitale, soit petite, & même qu'il s'amusoit quelquefois pour son plaisir, quand il en trouvoit l'occasion, à lire les épitaphes sur les tombeaux, avec ses doigts.

On l'a souvent entendu regretter de ne s'être point appliqué à apprendre à écrire dans sa jeunesse, & il assurait qu'il auroit pu aisément y réussir. On ne trouvera plus ceci incroyable, quand on saura qu'on l'a vu souvent porter son jugement aussi certainement sur la bonté d'un instrument de mathématique, & sur la justesse des divisions, en l'examinant seulement par le toucher, que les yeux les plus clairvoyants auroient pu le faire, jusques là qu'on venoit ordinairement le consulter là-dessus. Enfin on ne peut plus douter qu'il ne fût capable de traiter toutes les especes d'équations, & les calculs les plus compliqués, avec beaucoup d'adresse & de capacité ; mais je n'entreprendrai point de déterminer jusqu'à quel point il pouvoit se reposer sur la force de son imagination (qui certainement étoit bien grande), & comment il avoit recours aux inventions mécaniques à mesure qu'il en avoit besoin.

De tout ce que je viens de décrire , & de plusieurs autres ingénieuses inventions de pareille nature que j'ai vues, je conclurai par cette observation générale , que comme la connoissance & l'usage des symboles (ou des signes sensibles & arbitraires de nos idées intellectuelles) est d'une grande importance , & a beaucoup d'étendue dans toutes les parties des mathématiques , il avoit inventé de nouvelles especes de symboles mathématiques , inconnus & inouis jusqu'à présent , qui s'accommodoient particulièrement au besoin qu'il en avoit , suivant les circonstances. Les symboles sensibles communément reçus & en usage pour représenter les idées mathématiques , & pour les rapporter à notre imagination , ou à celle des autres , sont dérivés de nos deux sens principaux , la vue & l'ouïe , & sont (pour m'exprimer plus facilement) audibles ou visibles. Il est vrai qu'il pouvoit faire usage des premiers & acquérir beaucoup de connoissances par leur moyen , en conversant avec les autres , & principalement en écoutant la lecture des meilleurs Auteurs en mathématiques ; mais il étoit entièrement privé du secours des derniers (je veux dire des symboles visibles) dont cependant nous trouvons l'usage si indispensable & si nécessaire , que c'est le seul moyen qui nous sert à acquérir la plus grande partie de nos connoissances en mathématique.

Qu'a-t-il donc fait pour surmonter cet obstacle qui nous paroît invincible , & pour satisfaire au desir violent qu'il ressentoit d'acquérir ces connoissances ? Il eut recours à un autre sens qu'il possédoit parfaitement , & substitua le toucher à la place de la vue , en inventant une nouvelle espece de symboles mathématiques que nous pouvons

appeller *palpables* ou *sensibles*. Il s'en servoit pour rapporter les idées mathématiques à son entendement , puisque l'entrée leur étoit refusée du côté des yeux. Ainsi par le moyen de ces symboles imparfaits & différents , suivant les besoins qu'il en avoit , & par le secours d'une vive conception , & d'une persévérance obstinée , il fit des progrès admirables dans cette science. Voilà les instruments (si peu convenables en apparence) avec lesquels il rapportoit à son imagination les plus difficiles & les plus sublimes idées des mathématiques , & avec lesquels il s'étoit rendu capable d'en déduire les applications les plus convenables & les plus utiles.

Nous devons donc avouer de bonne foi , nous qui jouissons de la vue & de l'entendement , que tout ceci nous paroît bien extraordinaire & merveilleux. Pour moi , je ne puis me le représenter durant le cours de toutes ses études , que comme un génie vraiment mathématicien qui se roidissoit contre les plus grands obstacles , & qui , en se passant des secours ordinaires que la nature lui avoit refusés , fit le plus rude apprentissage , capable de décourager tout autre que lui dans ses études. Mais par une heureuse sagacité & une industrie opiniâtre , à chaque difficulté qu'il rencontroit , il trouvoit des expédients pour la surmonter. Il étoit résolu , non à abandonner leur poursuite , mais à persister avec constance jusqu'à ce qu'il devînt supérieur à ces obstacles , pour satisfaire à l'ambition démesurée qu'il avoit de tenir le premier rang parmi les mathématiciens.

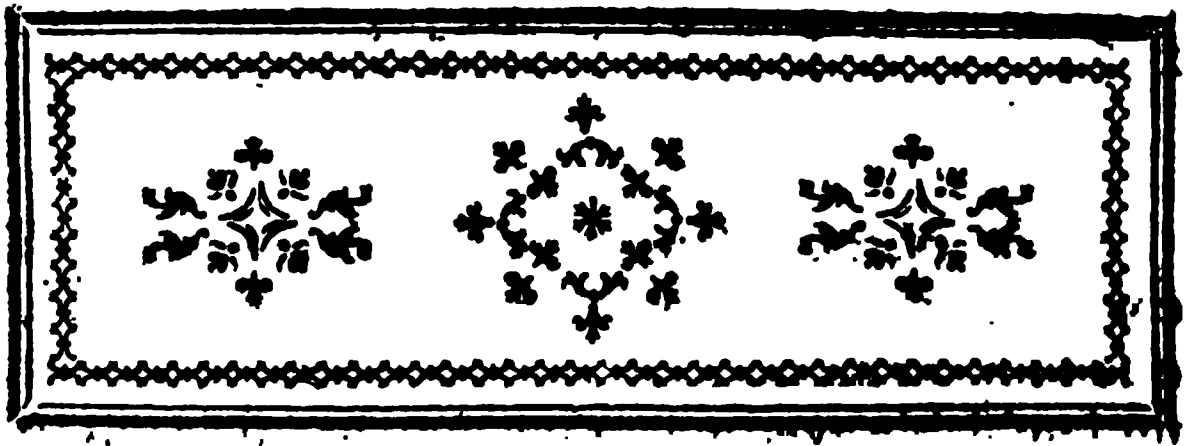
Remarque.

M. Saunderson étoit originaire de la province

254 ARITHMÉTIQUE PALPABLE.

d'Yorck ; il eut le malheur de perdre entièrement la vue par la petite vérole , à l'âge d'un an. Malgré cet accident , il vint à bout par la force de son génie de faire des progrès si étonnans dans les mathématiques , qu'on le trouva digne d'occuper la chaire de Professeur de Mathématiques dans l'Université de Cambrigde. Il a composé des Eléments d'algebre en Anglois , en deux volumes *in-4°* , qui y furent imprimés en 1741 , quelques années après sa mort , aux dépens de l'Université. Ce petit traité d'*Arithmétique palpable* , qui en est extrait , est écrit par le Professeur qui lui succéda , & qui fut chargé de l'édition de son ouvrage.

Fin de l'Arithmétique palpable.



É L É M E N T S

DE

G É O M É T R I E.

D É F I N I T I O N I.

1. **L**A *Géométrie* est la science de l'étendue qu'occupent les corps, & de leurs propriétés, selon leurs trois dimensions ; *longueur, largeur, & profondeur.*

On appelle *Matiere* ou *Corps* tout ce qui a des parties unies les unes aux autres.

D É F I N I T I O N I I.

2. La *Ligne* est la longueur considérée sans égard à la largeur & à la profondeur. Le commencement & la fin de la ligne se nomment *Point*. Dans la Géométrie le point est une portion de matière considérée comme n'ayant point de parties, ou comme *indivisible* ; car autrement on le considéreroit comme une ligne qui auroit aussi son commencement & sa fin. La ligne est la trace que laisseroit après lui un point qui iroit de A en B.
Planche I. Fig. 1.

Remarque.

3. Ce n'est pas sans raison que les Géomètres considèrent le point comme tellement indivisible, que loin qu'un homme soit capable d'en former un semblable avec aucun instrument, il ne puisse pas même l'imaginer. C'est afin qu'on ne considère pas l'extrémité d'une ligne comme une de ses parties ; car dans la Géométrie pratique il faut bien se garder de le penser ainsi.

D É F I N I T I O N I I I.

4. La *Ressemblance* est cette identité des parties par lesquelles une chose se distingue d'une autre.

Remarque.

5. Supposons qu'ayant deux choses A & B absolument semblables, vous les considériez avec attention l'une & l'autre en particulier. Vous remarquerez exactement tout ce qu'on peut observer dans la chose A, & vous écrirez vos observations. Après en avoir fait autant de B, comparez tout ce que vous avez remarqué, & vous trouverez absolument la même chose, si vous en exceptez cependant la quantité qu'on ne peut ex-

D É F I N I T I O N I V.

7. On nomme *Ligne droite* A B, celle dont chaque partie est semblable au tout, & qui est le plus court chemin d'un point A à un point B. Elle a ses parties également posées entre ses extrémités, & est unique, parceque d'un point à un autre point il ne peut y avoir deux plus courts chemins. La *Ligne courbe* C D est celle dont les parties ne ressemblent pas au tout, & qui ne sont pas posées également entre ses extrémités. Il y en a de *régulières* & d'*irrégulières*; la première se conduit toujours du même sens, & non pas la seconde C D. Pl. I.
Fig. 14

Remarque première.

8. La ligne droite se tire sur le papier avec une plume, un crayon, un pinceau, &c. en suivant la règle donnée pour les points. On la tire sur le bois ou la pierre avec un fil frotté de craie ou de charbon. Pour marquer une ligne droite sur la terre, on plante deux bâtons, & on la tire de l'un à l'autre. On connoît qu'elle est droite, en plantant sur la même ligne un troisième bâton entre les deux autres; parcequ'alors appliquant un œil devant le premier, il doit empêcher de voir les autres; car si on en apperçoit plus d'un, la ligne n'est pas exactement droite.

Remarque seconde.

9. Pour mesurer une ligne on se sert d'une longueur déterminée, par exemple, d'une *toise*, que l'on divise en pieds, le pied en pouces, le pouce en lignes, &c. Et comme la mesure est arbitraire, on conçoit aisément qu'elle n'est pas la même dans tous les pays.

Remarque troisieme.

10. Il faut encore bien faire attention que la division de la perche , de la toise , pied , &c. est différente selon les provinces , royaumes , & même les villes. Le pied de Roi est ordinairement divisé en douze parties , & la mesure géométrique n'est divisée qu'en dix.

D É F I N I T I O N V.

Pl. I.
Fig. 2. 11. La définition de la ligne courbe est connue de tout le monde. Le *Cercle* se fait en conduisant une ligne droite en rond autour & à égale distance du point fixe C.

Remarque.

12. On se sert d'un instrument qu'on nomme *compas*, pour marquer un cercle sur du papier. Quand on veut le figurer sur la terre , & dans toutes les occasions où l'on ne peut user de l'ouverture du compas , on se sert d'un fil , d'une ficelle ou d'une perche , attachés par un bout à un point fixe qui sert de centre.

D É F I N I T I O N V I.

Pl. I.
Fig. 2. 13. On nomme *Centre* du cercle le point C , parceque tous les points de la circonférence A , D , F , G , E , en sont également éloignés (§. 11.) La ligne droite C A se nomme le *demi-diametre* ou le *rayon* : la ligne qui commence au point D de la circonférence & finit à l'autre point de la circonférence E , en passant par le centre C , se nomme *Diametre* ; & toute autre ligne qui , prenant naissance à un point de la circonférence , va

finir à un autre point , sans passer par le centre , se nomme *corde* ou *sous-tendante*.

Remarque.

14. On divise la circonférence de quelque cercle que ce soit en 360 parties égales , qu'on nomme *Degrés* , parceque ce nombre peut être facilement & exactement divisé par beaucoup d'autres, comme 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , &c. On divise ensuite chaque degré en 60 *minutes* , & chaque minute en 60 *secondes*. On désigne ordinairement les degrés par ($^{\circ}$) , les minutes par ($'$) , & les secondes par ($''$) : par exemple , $3^{\circ} 25' 17''$; cela veut dire 3 degrés 25 minutes & 17 secondes : ou bien 3° toises 2' pieds 4" pouces 5^m lignes.

D É F I N I T I O N V I I.

15. Lorsque deux lignes AB & AC, s'inclinent l'une vers l'autre, se coupent en un point A , on appelle *angle* l'espace qui se trouve entre ces deux lignes. Pl. I.
Fig. 31

Remarque.

16. On marque cet angle par une seule lettre A ; ou , pour éviter la confusion , & le distinguer des autres angles , on le marque quelquefois avec les trois lettres BAC , en sorte que A affecté au *sommet* ou *pointe* de l'angle , tiennent le milieu entre B & C. La grandeur de l'angle se mesure par un petit arc fait avec un compas ouvert à volonté , dont on met une jambe au point A comme & l'on conduit l'autre , par exemple , de On dit donc que l'angle est d'autant de de l'arc DE en contient , de. l'on mesure

demi-cercle de laiton ou autre matière , auquel on donne aussi le nom de *rappporteur*.

D É F I N I T I O N V I I I .

17. La *Ligne perpendiculaire* est celle qui en coupe une autre à angles droits , c'est-à-dire , de façon que les angles qu'elle forme de part & d'autre soient égaux. Ainsi l'on connoît que la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD.

D É F I N I T I O N I X .

Pl. I. 18. L'angle ABC , formé par la perpendiculaire
Fig. 4. AB & la ligne BC , s'appelle *angle droit* (§. 17) ,
Fig. 4. Tout angle E plus petit que le droit se
nomme *angle aigu* , Fig. 5 ; & tout autre angle plus
grand que le droit , comme feroit F , se nomme
angle obtus , Fig. 6.

D É F I N I T I O N X .

Fig. 7. 19. L'angle A fermé par la ligne droite BC ,
se nomme *Triangle*. Lorsqu'un des trois angles de
ce triangle est droit , comme A , on le nomme
Fig. 8. *Triangle Rectangle*. Lorsqu'un des trois est obtus ,
comme O , on l'appelle *Ambligone* ou *Obtus-angle* ; & lorsque tous trois sont aigus , il se nomme
Fig. 9. *Oxigone* ou *Acutangle*. Si les trois côtés sont
Fig. 10. égaux , on le nomme *Equilatéral* ; s'il n'a que deux
côtés égaux AB & BC , on l'appelle *Equijambe* , ou
Fig. 11. *Isocele* ; si aucuns des côtés ne sont égaux entre
eux , comme HTK , il se nomme *Triangle Scalene*.
Fig. 9. La *base* d'un triangle est le côté sur lequel on
abaisse une perpendiculaire de l'angle opposé B.
Cette perpendiculaire se nomme *Hauteur du triangle* par rapport à sa base. Les deux parties de la
base

base divisée par la perpendiculaire se nomment *Segments de la base*.

On appelle aussi *base* le plus grand côté d'un triangle rectangle; savoir celui qui est opposé à l'angle droit. Il se nomme plus communément *Hypothénuse*. Dans le triangle isoscele, on prend ordinairement pour base le côté inégal aux autres.

DÉFINITION XI.

20. Le *Quarré* est une figure dont les quatre côtés AB , BC , CD , DA , sont égaux & forment des angles droits. Le *Rectangle* ou *Quarré long* est celui dont tous les angles sont droits, mais dont les deux côtés opposés seulement sont égaux, comme EH & FG , & les deux autres plus petits, EF & HG . Le *Rhombe* ou *Losange*, en terme de Blason, a les quatre côtés IK , KL , LM , MI égaux, & les angles obliques. Le *Rhomboïde* a les quatre angles obliques; mais il n'a de côtés égaux que les deux opposés ON & PQ , QN & OP .

Pl. 1.
Fig. 12.
Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

On nomme *Trapeze* le *Quadrilatere*, ou figure à quatre côtés, mais dont aucun n'est égal avec les autres, comme $STVZ$. On donne enfin le nom de *Trapézoïde* à la figure quadrilatere, dont deux des côtés opposés sont paralleles entre eux, comme EF & GH .

Fig. 16.

Fig. 17.

DÉFINITION XII.

21. Toutes les autres figures qui ont plus de quatre côtés se nomment *Polygones*, & prennent des noms particuliers selon la quantité déterminée qu'ils en ont; *Pentagones*, s'ils en ont cinq égaux; *Exagones*, s'ils en ont six; *Eptagones*, quand ils en ont sept; *Octogones*, s'ils en ont huit; *Endécagones*, s'ils en ont neuf; & *Dodécagones*, s'ils

Fig. 18.

Pl. I.

Fig. 18.

ont douze côtés. Quand tous les angles d'un polygone sont égaux, comme dans l'*Exagone* A B C D E F, on le nomme *Polygone régulier*, ou figure régulière; si au contraire les côtés & les angles ne sont pas égaux, on l'appelle *Polygone irrégulier*, comme le Pentagone G H I K L.

Fig. 19.

D É F I N I T I O N X I I I.

Fig. 10.

22. On nomme *Paralleles* deux lignes A B & C D, qui, quelque longueur qu'elles aient, sont toujours également distantes l'une de l'autre.

D É F I N I T I O N X I V.

Fig. 12.

23. Le *Parallélogramme* est une figure de quatre côtés, dont les deux opposés sont parallèles entre eux, comme le quarré, le rhombe, &c. Quand les angles d'un parallélogramme sont droits, on l'appelle *parallélogramme rectangle*, ou simplement *rectangle*.

Fig. 14.

La *Base* d'un parallélogramme est le côté sur lequel on lui a tiré, de l'un de ses deux angles opposés, une perpendiculaire qu'on appelle *hauteur du parallélogramme* par rapport à sa base I M, où l'on voit que la perpendiculaire tombe en dehors en L O, & qu'elle tomberoit en dedans si on l'avoit tirée de l'angle K.

Axiome I.

24. Entre deux points il ne peut y avoir qu'une seule ligne droite.

Corollaire L

25. Deux lignes droites ne peuvent donc renfermer un espace ou une étendue, parcequ'elles

doivent se réunir aux deux points de leurs extrémités.

Corollaire I I.

26. Par conséquent dans tous triangles, deux Pl. I. côtés pris ensemble, comme AB & BC , sont Fig. 7. 8. 9. plus grands que le troisieme AC . 10.

Axiome I I.

27. Tous les rayons d'un cercle sont égaux entre eux. (§. 13.)

Axiome I I I.

28. Les arcs DE & BC , & tous les autres ren- Fig. 21. fermés entre les jambes de l'angle AB & AC , & qui ont pour centre le sommet de l'angle A , ont la même quantité de degrés.

Corollaire.

29. Puisque la grandeur de l'angle A se mesure Fig. 21. par le nombre des degrés de l'angle DE ou BC , (§. 16.) quand on voudra donc mesurer un angle, soit grand ou petit, il suffira de faire un arc semblable à DE ou BC .

Axiome I V.

30. Les lignes droites, & les angles qui se couvrent mutuellement, sont égaux : & s'ils sont égaux, ils se couvriront.

Axiome V.

31. Les figures qui se couvrent mutuellement, sont semblables & égales : & celles qui sont égales & semblables se couvrent mutuellement (§. 4.)

Remarque.

32. Il faut bien observer que , pour que deux figures soient égales , elles doivent se couvrir mutuellement . car quoique de deux grandeurs mises l'une sur l'autre , celle de dessus couvre celle de dessous ; si la grandeur de dessous , renversée sur celle de dessus , ne pouvoit la couvrir exactement , elles ne seroient pas égales ; ainsi deux grandeurs doivent avoir précisément la même figure & les bords de même étendue pour pouvoir se couvrir mutuellement.

Axiome V I.

33. Si deux figures ou lignes sont formées ou décrites de la même manière , & par de semblables moyens & de semblables instruments , ces figures ou lignes sont semblables entre elles (§. 4.)

Corollaire.

34. Tous les points (§. 2 & 4.) & les lignes droites étant semblables entre elles (§. 7.) , & le cercle étant formé par une ligne droite tournée en rond autour d'un point (§. 11.) , tous les cercles & leurs circonférences doivent être semblables quant à la figure.

Axiome V I I.

Corollaire.

37. Si du centre C on élève une perpendiculaire *pl. I.*
CD, les angles o & x seront égaux entre eux : *Fig. 21.*
 (§. 17.) le quart d'un cercle, c'est-à-dire 90° ,
 (§. 16, 36.) est donc la mesure d'un angle droit,
 & par conséquent tous les angles droits sont égaux
 entre eux (§. 35.), & un angle égal à un droit,
 est un angle droit (§. 35.)

Théorème I.

38. Les deux angles x & o , formés par la ligne
 perpendiculaire *DC* appuyée sur la ligne *AB*, *Fig. 22.*
 pris ensemble, font 180° .

Démonstration.

On peut décrire un demi-cercle du point C sur
 la ligne *AB* (§. 36.) : le demi-cercle est donc la *Fig. 22.*
 mesure de la somme des angles x & o (§. 16.),
 qui feront par conséquent 180° , puisque le cercle
 entier est composé de 360° .

Corollaire.

39. Si nous avons donc un angle inaccessible à *Fig. 24.*
 mesurer dans un champ, ou un angle obtus, avec
 un quart de cercle on mesure alors l'angle de
 suite qu'il faut leur substituer.

DÉFINITION XV.

Si l'on prolonge l'un des côtés *CB* d'un angle
CBA au-delà du sommet *B* en *E*, l'angle *ABE*
 fait par le prolongement *BE* avec l'autre côté
AB, & l'angle *ABC*, se nomment *Angles de suite.*

Et si l'on prolonge aussi l'autre côté AB en H ; l'Angle ABC & l'angle HBE se nomment *Angles opposés au sommet*, ou *verticaux*.

Théorème II.

Pl. I. 40. Si la ligne droite AB coupe l'autre CD au
Fig. 25. point u , les angles *verticaux* o & x sont égaux.

Démonstration.

$o + u = 180^\circ$, & $u + x = 180^\circ$ (§. 38.);
donc $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.) & par conséquent $o = x$ (§. 28. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Fig. 25. 41. Si nous avons donc un angle à mesurer dans un champ ou ailleurs, au lieu de mesurer x qui peut-être feroit inaccessible, il faudra seulement mesurer l'angle vertical o , parceque les angles *opposés au sommet* sont égaux.

Théorème III.

Fig. 26. 42. Tous les angles dont la pointe ou sommet est au point C , pris ensemble, sont égaux à quatre angles droits, ou, ce qui est le même, à 360° .

Démonstration.

Le cercle entier est la mesure des angles énoncés dans le Théorème (§. 11. 16.): si on les prend donc tous ensemble, ils contiendront les quatre angles droits qui font le cercle entier (§. 37), ou 360° (§. 14.)

Problème I.

[43. Mesurer un angle donné.

Solution.

1°. Si l'angle donné est sur le papier , posez le centre du rapporteur sur la pointe de l'angle A , & ajustez le bord intérieur de la règle qui fait le diamètre du rapporteur sur la jambe de l'angle A B. Pl. I.
Fig. 27.

2°. Comptez ensuite sur le rapporteur le nombre des degrés que contient l'arc D E qui se trouve entre les deux côtés de l'angle A B & A C.

Si l'angle proposé est dans un champ :

1°. Posez le *demi-cercle* , ou *graphometre* , de façon que son diamètre A B réponde à un des côtés du triangle. Fig. 28.

2°. Faites tourner sur le centre du graphometre la *règle* ou *alidade* E F jusqu'à ce que vous apperceviez l'extrémité de l'autre côté de l'angle à travers la fente des pinnules qui sont attachées à cette alidade.

3°. Comptez ensuite les degrés que marque la *ligne de foi* de l'alidade qui passe par le centre du demi-cercle , en commençant à la jambe de l'angle à laquelle répond le diamètre du graphometre ; & vous connoîtrez la grandeur de l'angle. (§. 16.)

Problème I I.

44. Mesurer une ligne droite.

Solution.

Si la ligne proposée est sur le papier , tirez aussi une ligne droite sur le papier , de laquelle vous ferez une *mesure* ou *longueur* sur laquelle vous prendrez avec un compas dix parties égales à volonté , que vous nommerez *pieds* ; vous transporterez ensuite cette longueur de dix pieds sur le

reste de votre mesure autant de fois que faire se pourra, & vous aurez une mesure (§. 9.) propre à mesurer toute ligne droite sur le papier.

Si la ligne à mesurer est dans un champ, on se sert d'une chaîne, d'une corde, d'une perche, ou d'une toise, dont les divisions sont connues : il suffit de diviser une toise en pieds ; & la dernière d'une extrémité doit être divisée en pouces.

Pl. II.

Fig. 29.

Lorsqu'on proposera donc une ligne droite à mesurer sur le papier :

1°. Posez une jambe d'un compas sur A & ouvrez-le jusqu'à ce que l'autre jambe soit posée sur B.

2°. Transportez ensuite une jambe du compas ainsi ouvert sur le commencement d'une division, par exemple, de dix pieds, & l'autre jambe sur le reste de votre mesure proposée, en remarquant bien exactement sur quelle autre division elle tombera, par exemple, 5 pouces, ou 5 lignes. On verra par là que la ligne proposée a 10° & 5' ou 5" de longueur, parcequ'elle contient 10 pieds & 5 pouces ou 5 lignes de la mesure préparée.

Voulez-vous mesurer une ligne donnée sur la terre ?

1°. Plantez un piquet à chaque extrémité, & si la ligne donnée étoit beaucoup plus longue que votre *toise*, *perche*, *cordeau*, &c. posez un bout de votre mesure au bas d'un des petits piquets plantés aux extrémités de la ligne donnée ; conduisez l'autre bout de la mesure sur la ligne, & à l'extrémité de cette mesure plantez un piquet pour faire souvenir que l'espace d'entre ces deux piquets est la longueur d'une toise, perche, &c. Transportez ensuite votre mesure depuis le second piquet que vous venez de planter, jusqu'à

l'extrémité de la ligne proposée , en observant de planter un piquet au bout de chacune des longueurs de votre mesure.

2°. Comptez le nombre des toises , &c. que la ligne donnée contient , par le nombre de fois qu'elle renferme la longueur de votre mesure , en tout ou en parties.

Remarque I.

45. On peut ajuster un anneau à chaque extrémité de la chaîne ou corde , dans lesquels anneaux on fait entrer les petits bâtons ou piquets plantés en terre.

Remarque II.

46. Les chaînes sont incommodes par leur pesanteur , & on ne les étend pas assez facilement. Si on mesure une ligne droite avec une perche en la tournant sur pointe , il faut avoir soin ou d'ajouter à la ligne que l'on mesure la grosseur ou diamètre de la perche autant de fois qu'on l'aura tournée , ou de diminuer le diamètre de la perche , de la longueur de la ligne qu'aura produit la mesure , autant de fois qu'on l'aura tournée. Je suppose , par exemple , que l'on me propose une ligne droite de six toises à mesurer ; je prends en main une perche de la longueur précisément d'une toise , & d'un pouce de diamètre ou de grosseur , & j'approche un bout de cette perche d'un des piquets plantés aux extrémités de la ligne proposée ; ensuite je leve le bout de la perche qui touchoit au piquet , & j'en forme en l'air un demi-cercle dont le centre est à l'autre bout de la perche , qui dans le moment qu'elle

forme une perpendiculaire avec la ligne droite donnée , se trouve posée sur la grosseur , & puis achevant le demi-cercle , en la couchant doucement sur le reste de la ligne donnée , le diamètre de ce demi-cercle se trouve avoir deux toises & un pouce , au lieu de deux toises seulement. Je continue à mesurer de la même façon le reste de la ligne droite , & je trouve que cette ligne ne me paroît avoir que 5 toises & 7 pouces au lieu de 6 toises qu'elle a en effet. Cela vient donc de la grosseur de la perche qui ayant un pouce de grosseur , & ayant été tournée 5 fois , a pris 5 pouces de la ligne donnée qu'il faut par conséquent ou ajouter à cette ligne donnée , ou diminuer de la longueur de la perche , pour faire la juste mesure de la ligne proposée.

Il n'y a pas moins d'inconvénients à se servir d'une corde de chanvre ; elle s'allonge dans les temps chauds & secs , & se raccourcit dans les temps humides. Schwenter a remarqué (livre 1 , trait. 2 , page 381 de sa Géom. prat.) qu'une corde de 16 pieds de longueur s'étoit raccourcie presque d'un pied en moins d'une heure dans un temps de brouillards. Pour lever cet inconvénient, il faut tordre les ficelies dont on veut faire la corde dans un sens contraire à celui que l'on tordra la corde même , qu'il faudra en même temps imbiber d'huile de lin , & quand elle sera sèche , la passer dans de la cire fondue , & enfin la goudronner. Le même Schwenter assure (page 382) qu'une corde ainsi préparée resteroit un jour plongée dans l'eau sans qu'on y pût remarquer presque aucune diminution de longueur.

Remarque III.

47. On a inventé un instrument fort commode pour mesurer les lignes sur le papier ; on le nomme *Echelle Géométrique* ; nous en parlerons plus au long dans la suite.

Problème III.

48. Faire un angle égal à un angle donné.

I. CAS. Si on propose l'angle par degrés , tirez d'abord la ligne droite A B.

Pl I.
Fig. 27.

1°. Appliquez le centre du rapporteur sur le point A , & son rayon sur la ligne A B.

2°. Comptez autant de degrés depuis D vers E que l'angle donné doit en avoir.

3°. Quand vous aurez trouvé ce nombre , marquez-le par E.

4°. Tirez enfin une ligne droite de A par E , & vous aurez l'angle que vous cherchez.

II. CAS. Lorsqu'on propose l'angle D E F sur le papier :

Pl. II.
Fig. 31.

1°. Du centre E décrivez à volonté l'arc G H.

2°. Tirez ensuite la ligne droite *ef*.

3°. De *e* décrivez l'arc *hi* avec la même ouverture de compas de laquelle vous avez formé l'arc ci-dessus G H.

4°. Posez une jambe du compas sur H , & ouvrez le compas jusques à ce que l'autre porte sur le point G.

5°. Posez une jambe du compas ainsi ouvert sur *h* , & posant l'autre sur l'arc *hi* , vous marquerez le point où elle tombe *g*.

6°. De *e* par *g* tirez une ligne droite *ed* , & vous aurez l'angle que vous cherchez.

III. CAS. Si l'angle que l'on propose est sur la terre, il faut se servir du demi-cercle ou graphometre de la maniere que nous avons dit au problème I. (§. 43.)

Démonstration.

Le premier & le troisieme cas sont démontrés par l'opération même.

Dans le second, l'arc $gh = GH$, comme on le démontrera (§. 92), & par conséquent l'angle $def = DEF$ (§. 16, 35). Ce qu'il falloit démontrer.

Théorème IV.

Fig. 32.

49. Si dans les deux triangles ABC & abc , on a l'angle $A = a$, $AC = ac$, & $AB = ab$; on aura aussi $BC = bc$, $B = b$, $C = c$, & les triangles seront égaux entre eux.

Démonstration.

Imaginons-nous que le triangle abc est tellement placé sur le triangle ABC , que le point a soit sur A , & la ligne droite ab sur AB : comme $ab = AB$, le point b fera sur B (§. 30); & comme $a = A$, la droite ac fera aussi placée sur AC (§. 30); & parceque $ac = AC$, le point c fera sur C , & par conséquent bc sur BC (§. 24): les triangles ABC & abc seront donc égaux (§. 31.) Ce qu'il falloit démontrer.

Théorème V.

Fig. 33.

50. Si dans les deux triangles ABC & abc on a l'angle $A = a$ & $B = b$, & le coté $AB = ab$;

les triangles seront égaux , & $AC = ac$, $BC = bc$.

Démonstration.

Représentons-nous le triangle ABC posé sur le triangle abc , de manière que A soit posé sur a , & le côté AB sur le côté ab , puis B sur b , la droite AC sur ac , & BC sur bc (§. 30) ; pour lors les lignes droites AC & BC se rencontrent au point C , & les droites ac & bc au point c ; le point C se trouvera donc posé sur le point c , & les triangles seront égaux (§. 31) ; & $AC = ac$, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème V I.

§ 1. Si dans les deux triangles ACB & acb , on trouve $AC = ac$, $AB = ab$, & $BC = bc$; on aura aussi $A = a$, $B = b$, $C = c$, & tous les triangles de cette façon seront égaux.

Pl. II!
Fig. 324

Démonstration.

De A , rayon AB , décrivez avec un compas l'arc y , & de C , rayon CB , décrivez l'arc x ; supposons ensuite le triangle acb posé de façon sur le triangle ACB , que le point a soit sur A , & le point c sur C (§. 30) ; la ligne droite ab se terminera à l'arc y , & cb à l'arc x ; le point b sera donc sur B , à l'endroit précisément où les arcs se coupent ; & par conséquent les triangles (§. 31) & les angles (§. 30) seront égaux.

Fig. 325

Corollaire.

§ 2. On doit donc conclure que de trois lignes

droites données on ne peut faire qu'un même triangle.

Problème IV.

53. Construire un triangle équilatéral sur la ligne donnée AB.

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur A ; & ouvrez le compas jusqu'à ce que l'autre jambe rencontre B ; & sans changer la jambe du compas posée sur A , décrivez avec l'ouverture de AB , un arc au-dessus de la ligne donnée.

2°. Mettez ensuite une jambe du compas sur B , & de la même ouverture décrivez un autre arc qui coupera le premier au point C.

3°. Tirez enfin des lignes droites de C à A & B , & le triangle se trouvera fait.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ayant été prises en égale longueur que la ligne AB (§. 27) ; le triangle ACB doit être équilatéral (§. 19.) Ce qu'il falloit démontrer.

Problème V.

54. Sur deux lignes droites données AB & BC , faire un triangle qui ait deux côtés égaux.

Solution.

1°. Ayant pris , par exemple , pour base du triangle la ligne droite AB , posez une jambe du compas sur B , ouvrez l'autre jambe jusqu'en C , & formez un arc au même point C.

2°. Faites sur A comme vous avez fait sur B, & ce second arc coupera le premier au point C.

3°. Tirez des lignes droites de C à A & B, & le triangle sera formé.

Démonstration.

Les lignes droites A C & B C ont été faites de la même ouverture de compas ; le triangle doit donc avoir les deux côtés égaux (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème VI.

55. Faire un triangle de trois lignes droites données. Pl. II.
Fig. 35.

Solution.

1°. Prenez pour base du triangle une des trois, comme seroit A B.

2°. De A comme centre , décrivez un arc avec un compas , dont l'ouverture soit la longueur d'une seconde des trois lignes données , comme A C.

3°. Et puis ouvrant le compas de la longueur de la troisieme ligne B C , posez une jambe sur B, & de l'autre formez un arc qui coupe le premier au point C.

4°. Tirez ensuite les lignes droites, C A & C B ; & vous aurez le triangle que vous desirez (§. 52.)

Remarque I.

56. Si dans l'opération ci-dessus les deux arcs ne se coupent pas, on ne peut faire le triangle

avec les trois lignes droites données. (§. 26.)

Remarque I I.

§ 7. Les regles pour la construction des figures font d'une très grande utilité. C'est sur elles qu'est fondée toute l'*Ichnographie* d'un champ, c'est-à-dire, la levée des plans, sans laquelle il n'est pas possible de dresser la carte d'un terrain. Bien plus, les principes de ressemblance que j'ai introduits dans la géométrie, servent aussi, comme on le verra dans la suite, à la démonstration de la ressemblance des figures. On y voit même les parties qu'on doit choisir dans un terrain, quand il s'agit de le mesurer, ou d'en dresser un plan figuré ou non figuré. C'est en conséquence de cette utilité reconnue que je vais proposer encore quelques problèmes sur les triangles.

Problème V I I.

Pl. II. § 8. Faire un triangle de deux lignes droites données AB & AC , & de l'angle intercepté A .
Fig. 36.

Solution.

- 1°. Prenez pour base la droite AB .
- 2°. Formez au point A un angle égal à l'angle proposé. (§. 48.)
- 3°. Transportez sur la ligne AD l'autre droite donnée AC .
- 4°. Tirez de C une ligne droite à B , & le triangle sera fait. (§. 49.)

Remarque.

§ 9. Il n'est pas nécessaire dans la pratique de
marquer

marquer les lignes inutiles comme ici AD , mais on peut seulement désigner le point C après l'application de la règle.

Problème VIII.

60. Avec deux angles & une ligne droite donnés construire un triangle.

Solution.

- 1°. A l'extrémité A de la droite donnée AB pl. II.
formez un angle égal à un des angles proposés. Fig. 37.
2°. A l'extrémité opposée faites un autre angle donné (§. 48); les jambes de ces deux angles se couperont en C , & formeront le triangle que l'on demande. (§. 50.)

Problème IX.

61. Du lieu C mesurer la distance des deux autres lieux accessibles A & B . Fig. 38.

Solution.

- 1°. Plantez un bâton ou petit piquet au lieu C que vous aurez choisi à volonté.
2°. Mesurez la longueur de la ligne AC (§. 44) & portez-la de C en a , en sorte que le bâton que vous planterez au point a , soit en ligne droite avec C & A . (§. 8.)
3°. Faites la même opération pour la longueur de la ligne BC que vous transporterez en b .
4°. Mesurez enfin la longueur de la ligne ab , c'est la distance que l'on demande.

Démonstration.

Les angles x & y sont égaux (§. 40) ; & comme $AC = aC$ & $BC = bC$, on a $ab = AB$ (§. 49). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

62. Si la place étoit trop étroite pour pouvoir transporter en ab les longueurs entières des lignes AC & BC , il suffira de transporter la moitié, la troisième ou la quatrième partie, en Ca & Cb , & pour lors on aura $ab = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$ de AB , ce qu'il sera facile de comparer. (§. 152.)

Problème X.

63. Transporter un angle d'un terrain dans un autre avec une chaîne ou avec une corde.

Solution.

Pl II. Supposons qu'il faille transporter l'angle A
Fig. 39 en C.

1°. Prenez une longueur à volonté sur chaque jambe de l'angle donné A, & tirez une droite de l'un des points choisis F à l'autre D.

2°. Transportez de C en d la longueur AD, & attachez la corde aux deux piquets C & d , de manière que $Cf = AF$, $df = DF$.

3°. Plantez un piquet en f , & vous aurez l'angle $dCf = FAD$.

Démonstration.

Puisque $AF = Cf$, $AD = Cd$, & $DF = df$, l'angle C est donc égal à l'angle A. (§. 51.)

Problème XI.

64. Trouver la distance de deux lieux dont un seul B est accessible.

Solution.

1°. Ayant planté un piquet dans un endroit choisi à volonté, comme E, prenez la longueur de la ligne droite EB, que vous transporterez de E en C, de manière que le piquet se trouve en ligne droite avec B & C. (§ 8.)

Pl II.
Fig. 40.

2°. Faites au point C un angle égal à celui de B. (§. 63.)

3°. Marchez enfin de C vers D, jusqu'à ce que le piquet que vous planterez en D, soit en ligne droite avec FC & EA; & de cette façon la ligne CD sera égale à la ligne AB.

Démonstration.

On a fait l'angle C égal à l'angle B, & la droite CE égale à la droite EB. D'ailleurs les angles verticaux sont égaux (§. 40) : CD est donc égal à AB. (§. 50.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

1°. On s'y prend encore de la manière suivante. Fichez un piquet en I en ligne droite avec BA, puis un second où vous voudrez, comme en K.

Fig 41.

2°. Transportez de K en L la longueur de la ligne IK, puis en M la ligne BK.

3°. Marchez ensuite de M vers N jusqu'à ce que vous trouviez un endroit où vous puissiez planter un piquet qui soit en ligne droite avec M & L, aussi bien qu'avec KA, & vous aurez $MN = BA$.

Démonstration.

$BK = KM$ & $IK = KL$. $o = u$ & $m = n$,
 donc $IB = LM$ & $y = x$: car $o + m = u + n$,
 & $IK = KL$: on aura conséquemment $IA = NL$, & $AB = MN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

65. Ce que nous avons dit sur le Problème IX
 a lieu ici. (§. 62.)

Remarque II.

Pl. II.
 Fig. 40.

66. Si l'on vouloit trouver la largeur d'une riviere, & que la ligne droite BE ne pût être transportée de E en C le long du rivage, on fichera le piquet E à une distance du rivage, choisie à volonté; & dans ce cas la longueur de la droite CD surpassera d'autant plus la largeur de la riviere, que le piquet E sera éloigné de son bord.

Problème XII.

Fig. 43. 67. Tirer par le point C donné une parallele à la droite AB .

Solution.

1°. Appliquez une regle à la droite AB .

2°. Posez une jambe du compas en C , & ouvrez l'autre jusqu'à la regle, comme si vous vouliez décrire un arc dont la droite AB fût la *tangente*.

3°. Conduisez ensuite le compas de part & d'autre du point C , tout le long de la regle posée sur AB , & vous aurez la parallele DE . (§. 22.)

Autrement.

On peut faire la même opération avec une *parallele*, c'est-à-dire, un instrument composé de deux regles tellement attachées l'une à l'autre par deux renons égaux, qu'on puisse conduire facilement ces deux regles, selon les différents espaces qu'on veut leur faire parcourir. Ayant donc une *parallele*, posez une des regles sur la droite *AB*.

Pl. II.
Fig. 44.

2°. Conduisez l'autre jusqu'au point *C*, & vous pourrez tout le long de cette seconde regle tirer la droite *DE* *parallele* à *AB*.

Remarque.

68. Si dans la premiere façon de résoudre le Problème, on ne pouvoit ouvrir le compas jusqu'en *E*, on tirera une *parallele* à *AB*, à une distance proportionnée au compas, ou choisie à volonté, comme *CD*; & si la distance de *F* à *E* étoit encore trop grande pour que le compas y puisse atteindre, on formera encore une autre *parallele* à *CD*, & ainsi de suite jusqu'à ce que le compas puisse atteindre le point *E*: on fera pour lors la droite *LM* qui sera *parallele* à la droite *AB*: car $EF = HI$, & $FG = IK$: donc $EF + FG = HI + IK$: c'est-à-dire, $EG = HK$ (§. 24. Arith.), & par conséquent *LM* fera *parallele* à *AB*. (§. 22.)

Fig. 45.

Problème XIII.

69. Du point *C* donné abaisser une perpendiculaire sur la droite *AB*.

Fig 45.

Solution.

1°. Ayant posé une jambe du compas sur *C*,

M iij

coupez avec l'autre la ligne droite AB par un arc à volonté, comme DE .

2°. De D & E faites une intersection volontaire, comme en F .

3°. Conduisez une ligne droite par FC , jusqu'à G , & vous aurez la perpendiculaire que l'on demande.

Démonstration.

On a $DC = CE$ & $DF = FE$, on aura donc aussi les angles DFG & GFE (§. 51), & par conséquent les angles de suite égaux à G (§. 49): la droite CG sera donc aussi perpendiculaire sur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XIV.

Pl. II. 70. Elever du point C une perpendiculaire sur
Fig. 46. la droite AB .

Solution.

1°. Mettez une jambe du compas sur C .

2°. Coupez de part & d'autre à égale distance de C la ligne droite AB , comme seroit DE .

3°. De D & E faites une intersection en F avec la même ouverture du compas.

4°. Tirez enfin la droite GC par CF , & vous aurez la perpendiculaire demandée.

Démonstration.

On fait $DC = CE$ & $DF = FE$, & on a les angles droits de part & d'autre du point C (§. 51), & par conséquent on a la perpendiculaire GC élevée sur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Faites un instrument avec deux regles que vous Pl. II.
ajusterez de façon l'une à l'autre, qu'elles fassent Fig. 47.
un angle droit : cet instrument se nomme *Equerre*.

Appliquez un des côtés de l'équerre sur la ligne donnée AB de manière que le sommet de l'angle soit précisément sur le point C ; puis tout le long de l'autre côté de l'équerre vous tirerez la droite CD , qui sera perpendiculaire.

Démonstration.

L'angle de l'équerre est droit ; les lignes DC & CB , tirées le long de cette équerre, font donc aussi un angle droit ; & par conséquent DC sera perpendiculaire sur AB (§ 18).

Théorème VII.

71. Si dans les deux triangles rectangles ABC Fig. 48.
& abc , on a $AB = ab$ & $BC = bc$, ou dans les angles obliques $A = a$, on aura aussi $AC = ac$, $B = b$, $C = c$, & les triangles seront égaux.

Démonstration.

De l'espace BC ayant fait l'arc FG au point C , imaginons-nous que le triangle abc est placé sur l'autre ABC , de façon que le point a est sur A , b sur B : comme l'angle $a = A$, & $ab = AB$, le point c sera donc aussi sur C : & comme $bc = BC$, le point c se trouve sur l'arc FG (§. 13), & par conséquent aussi c se trouve sur C , précisément au point où l'arc FG coupe la droite AC ; BC tombant donc sur bc (§. 24), les triangles seront égaux (§. 31).

*Théorème VIII.*Pl. II.
Fig. 49.

72. Si la ligne transversale EF coupe les deux parallèles AB & CD aux points G & H, on aura, 1°. les deux angles alternes x & y égaux entre eux. 2°. L'angle *externe* o est égal à l'angle y qui lui est opposé. 3°. Les deux angles *internes* opposés u & y font tous deux pris ensemble 180° .

Démonstration.

1°. Qu'on tire les perpendiculaires HI & GK, qui seront égales (§. 2.), les angles I & K sont aussi égaux (§. 18, 37). Donc $x = y$ (§. 71.)

2°. $x = o$ (§. 40), donc $y = o$ (§. 22 Arith.)

3°. $u + o = 180^\circ$ (§. 38), donc $u + y = 180^\circ$ (§. 24 Arithm.). Voilà donc les trois propositions démontrées.

*Théorème IX.*Pl. III.
Fig. 49.

73. Si la ligne transversale EF coupe les droites AB & CD en G & H, de façon que les deux angles x & y , ou même l'angle externe o & l'interne y soient égaux; ou si les deux internes pris ensemble font 180° , les lignes AB & CD seront parallèles entre elles.

Démonstration.

1°. Abaissez de G la perpendiculaire GK sur la ligne CD: faites $GI = HK$, & tirez la droite HI. Comme $x = y$, on aura $I = K$ & $HI = GK$ (§. 49); par conséquent l'angle I sera droit (§. 37), & AB parallèle à CD.

2°. Soit $o = y$, comme $o = x$ (§. 40), on aura $x = y$ (§. 22 Arithm.): les lignes AB & CD seront donc parallèles entre elles.

3°. Soit $y + u = 180^\circ$: parceque $o + u = 180^\circ$ (§. 30), on aura $o = y$ (§. 22 & 25, Arithm.); conséquemment les lignes AB & CD feront paralleles. Voilà donc les trois propositions démontrées.

Théorème X.

74. Dans quelque triangle que ce soit les trois angles pris ensemble font 180° ; & si l'on prolonge un des côtés, l'angle externe sera égal aux deux angles internes opposés pris ensemble.

Démonstration.

Tirez par le sommet du triangle C une parallele DE à la base AB, vous aurez 1 = I, & 2 = II (§. 72) : or $1 + 3 + 11 = 180^\circ$ (§. 38); donc $1 + 3 + 2 = 180^\circ$ (§. 24, Arithm.) *Pre-
miere partie du Théorème démontrée.* Si on prolonge le côté AB jusqu'en D, on aura $3 + 4 = 180^\circ$ (§. 38) : or, par ce que nous venons de démontrer plus haut, $1 + 2 + 3 = 180^\circ$; donc $3 + 4 = 1 + 2 + 3$ (§. 22, Arithm.), & par conséquent $4 = 1 + 2$ (§. 25, Arithm.) Ce qui démontre la seconde partie du Théorème.

Pl. II.
Fig. 50.
Fig. 51.

Corollaire I.

75. Il n'y a donc qu'un seul angle droit dans quel triangle que ce puisse être, & les deux autres angles pris ensemble en font un droit, ou valent 90° (§. 37); & deux lignes droites perpendiculaires à l'égard d'une troisième, pourroient être prolongées jusqu'à l'infini sans jamais se rencontrer; c'est en quoi elles sont paralleles.

Corollaire II.

76. A plus forte raison ne pourra-t il se trouver plus d'un angle obtus dans un triangle (§. 18.)

Corollaire III.

77. Si de 180° on retranche l'angle d'un triangle, la somme des deux autres reste; & si au contraire de 180° on ôte la somme de deux angles d'un triangle, ce qui reste est la valeur du troisième.

Corollaire IV.

78. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième de l'un sera aussi égal au troisième de l'autre (§. 25, Arithm.)

Théorème XI.

Pl. III. 79. Dans un triangle isoscele $A B C$, les angles **Fig. 52.** x & y formés par la base sont égaux, & la perpendiculaire $C D$ coupera en deux parties l'angle C , la base $A B$, & le triangle même.

Démonstration.

Qu'on coupe en deux parties égales la droite $A B$, & qu'on tire ensuite la droite $D C$: puisqu'on a aussi $A C = C B$ (§. 19), on aura $x = y$, & $o = u$, $m = n$ & $\triangle A C D = \triangle C D B$ (§. 15, & par conséquent $C D$ perpendiculaire sur $A B$ (§. 17). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

80. Ainsi dans tout triangle équilatéral, tous

les angles sont égaux ; chacun vaut donc 60° .
(§. 74.)

Théorème XII.

81. Si dans le triangle ABC , les angles x & y de la base AB sont égaux, les côtés AC & CB seront aussi égaux. Pl. III.
Fig. 52.

Démonstration.

Tirez la droite CD , de manière que $m = n$; & comme $x = y$, on aura aussi $o = u$ (§. 78).
Donc $AC = CB$ (§. 50.)

Corollaire.

82. Si les trois angles sont donc égaux, & qu'ils valent par conséquent 60° (§. 74), les trois côtés seront donc aussi égaux entre eux.

Théorème XIII.

83. L'angle du centre est double d'un *angle à la circonférence*, lorsque ces deux angles ont un même arc pour base.

Démonstration.

I. CAS. $o = x + u$ (§. 74) ; or comme $AC = CB$ (§. 27), on aura $x = u$ (§. 79), & par conséquent $o = u + u = 2u$. Fig. 53.

II. CAS. $x = 2y$ & $u = 2o$, par le nombre 1 ; Fig. 54.
donc $x + u = 2y + 2o$ (§. 24, Arithm.)

III. CAS. $o + x = 2u + 2y$, & $o = 2u$, Fig. 55.
par le nombre 1 ; donc $x = 2y$ (25, Arithm.)
Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

84. La moitié de l'arc AD est donc la mesure Fig. 54.

- de l'angle à la circonférence ABD , dont l'arc AD est la base ; car l'arc entier AD est la mesure de l'angle du centre ACD (§. 16). Si l'angle ACB a pour base le demi cercle ADB , ou que l'angle HBK ait pour base l'arc HIK plus grand que le demi-cercle, il est évident que le demi-arc AD est précisément la mesure de l'angle ACD , & $\frac{1}{2} DB$ de l'angle DCB : de même $\frac{1}{2} HI$ de l'angle HBI , & $\frac{1}{2} IK$ de l'angle IBK : donc $\frac{1}{2} ADB$, ou le quart, est la mesure de l'angle ACB ; & $\frac{1}{2} HIK$, ou un peu plus que le quart, est aussi la mesure de l'angle HBK .

Corollaire I I.

- Fig. 56.** 85. Deux ou plusieurs angles ABC & ADC , terminés à la circonférence du même cercle, & qui ont le même arc AC pour base, sont égaux. (§. 35.)

Corollaire I I I.

- Fig. 57.** 86. Tout angle dans le demi-cercle ACB est droit : car il a le demi-cercle pour base, & le quart pour mesure (§. 84.)

Corollaire I V.

- Fig. 59.** 87. Un angle à la circonférence renfermé dans un cercle, est plus petit qu'un angle droit, s'il a pour base un arc plus petit que le demi-cercle ; il sera aussi plus grand qu'un angle droit, si sa base est un arc HK plus grand que le demi-cercle (§. 86) ; par conséquent il sera aigu dans le premier cas, & obtus dans le second (§. 18.)

Problème X V.

88. Examiner si une équerre est juste.

Solution.

1°. Décrivez à volonté le demi-cercle ACB . Pl. III.

2°. Tirez de chaque extrémité du diamètre les Fig. 57.
lignes droites AC & BC à un même point de la
circonférence, tel que bon vous semblera.

3°. Posez au point C l'angle de l'équerre, &
si ses deux côtés rasent les lignes droites AC &
 AB , l'équerre est juste.

Démonstration.

L'angle ACB est droit (§. 86); si l'équerre lui
est conforme, elle sera donc juste (§. 30). *Ce*
qu'il falloit démontrer.

Problème XVI.

89. Elever une perpendiculaire à l'extrémité
d'une ligne.

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur un point Fig. 60.
pris à volonté, comme C , & ouvrez l'autre jus-
qu'en A .

2°. Du point C marquez la même distance D
sur la ligne AB .

3°. Ensuite avec une règle appliquée le long de
 DC , marquez encore la même distance CA de
 C en E .

4°. Tirez enfin la ligne droite AEF , qui sera
perpendiculaire avec AB .

Démonstration.

Puisque $AC = CD = CE$, de C on peut
décrire un demi-cercle par les points EAD (§. 27,
36): l'angle A est donc droit (§. 86), & par con-

séquent la droite FA perpendiculaire à AB (§. 18). *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire la même opération avec l'équerre, comme nous l'avons vu (§. 70.)

Problème XVII.

90. Diviser une ligne droite en deux parties égales.

Solution.

Pl. III.
Fig. 61. 1°. Des deux extrémités de la ligne A & B , faites à votre gré les deux intersections C & D .
2°. Tirez une droite de C à D ; elle partagera en deux également la droite AB .

Démonstration.

AC étant égal à CB , & $AD = DB$, on a $o = y$ (§. 51) : ainsi dans les triangles ACE & ECB , $AE = EB$ (§. 49.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Fig. 62. 91. On peut essayer de faire la même opération mécaniquement, c'est-à-dire en tâtonnant. Car en mettant une jambe du compas au point A , on l'ouvre ensuite jusqu'à ce qu'on rencontre à peu près le milieu de la ligne, où l'on fait un petit arc. On fait la même chose de l'autre côté de la ligne B , le compas ouvert comme auparavant, & l'on voit pour lors si les deux arcs se rencontrent au même point E .

Théorème XIV.

Fig. 58 & 63. 92. Les cordes des arcs égaux AB & DE pris dans un même cercle, ou dans deux cercles

égaux, sont égales entre elles ; & si les cordes sont égales , les arcs le seront aussi.

Démonstration.

Tirez du centre C les rayons CA , CB , CE , & CD , qui sont tous égaux entre eux (§. 27). Et comme les arcs AB & DE sont égaux , les angles ACB & DCE seront aussi égaux (§. 35). Donc aussi $AB = DE$.

2°. Soit $AB = DE$, on aura $o = x$ (§. 51), & par conséquent les arcs AB & DE seront égaux (§. 35.)

Corollaire.

93. Si l'on divise donc la circonférence d'un cercle en tant de parties égales qu'on voudra , & qu'on tire des sous-tendantes , la figure aura chaque côté & chaque angle égaux (§. 85) ; la figure sera donc aussi régulière (§. 21.)

Problème XVII.

94. Diviser un arc en deux parties égales.

Solution.

1°. Des extrémités de la corde AB de l'arc AEB faites les intersections à volonté en C & D. Pl. III.
Fig. 64.

2°. Tirez une droite de C à D, elle partagera l'arc en deux parties égales.

Démonstration.

La ligne CD coupe la corde AB en deux parties égales au point E, & forme deux angles droits au même point (§. 90) ; on a donc $AE = BE$ (§. 49) ; par conséquent les arcs AE & BE sont égaux (§. 92.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XV.

Pl. III. 95. La perpendiculaire DA , coupant la corde **Fig. 65.** EF en deux parties égales en G , passe par le centre du cercle C , & coupe en même temps l'arc EDF en deux parties égales. Le rayon perpendiculaire abaissé du centre C sur la corde EF , coupe non seulement la corde, mais encore l'arc EDF .

Démonstration.

1°. Comme $EG = GF$, & qu'il y a deux angles droits au point G , on a $EAD = DAF$ (§. 49); ainsi les arcs ED & DF sont égaux. (§. 84, 85).

2°. Les cordes AE & AF étant égales, les arcs AF & EA le sont aussi (§. 92); par conséquent $AE + ED = AF + FD$ (§. 24, Arithm.): AD étant le diamètre du cercle, AD passe donc par le centre (§. 13.)

3°. Si CG est perpendiculaire à EF , les angles du point G seront égaux (§. 18). Et comme $EC = CF$ (§. 27), on aura $EG = GF$, & $ECD = DCF$ (§. 71); par conséquent les arcs ED & DF sont égaux (§. 35). Voilà les trois articles démontrés.

Problème XIX.

Fig. 66. 96. Diviser un angle donné BAC en deux parties égales.

Solution.

1°. Ayant posé une jambe du compas sur A , marquez un point à volonté sur chaque côté de l'angle, à égale distance de A , comme D & E .

2°. De D & E faites une intersection au point F.

3°. Tirez la droite AF, & l'angle sera divisé en deux parties égales.

Démonstration.

Puisque $AD = AE$ & $DF = EF$, & que la droite AF est commune aux deux triangles, on aura $\angle D = \angle E$. (§. 51.) Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XX.

97. Décrire un cercle dont la circonférence touche à trois points donnés. Pl. III.
Fig. 67.

Solution.

1°. De A & B faites des intersections à volonté, comme en D & E, & tirez la droite ED.

2°. Faites de semblables intersections de B & C en F & G, & tirez la droite FG : le centre du cercle sera le point H où les deux droites se coupent mutuellement.

Démonstration.

Si de A à B, de même que de B à C, on tire des lignes droites, elles seront les cordes des arcs du cercle que l'on cherche (§. 13). Or les lignes DE & FG coupent en deux parties égales les cordes AB & BC (§. 90). Chaque ligne passe donc par le centre du cercle (§. 95). Le centre sera par conséquent au point H, où les lignes se coupent réciproquement. Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XXI.

98. Construire un quarré sur une ligne droite donnée AB. Fig. 68.

Solution.

1°. Elevez à une de ses extrémités A une perpendiculaire qui ait la même longueur que la ligne A B. (§. 70, 89.)

2°. De B & C faites une intersection en D, le compas ouvert de la longueur A B.

3°. Tirez les droites C D & D B.

Problème XXII.

Pl. III. 99. Construire un rectangle avec deux lignes
Fig. 69. données A B & B C.

Solution.

1°. Joignez par un angle droit les deux lignes A B & C B. (§. 89.)

2°. De A faites un arc en D, le compas ouvert de l'espace B C, & mettant une jambe du compas sur C, vous l'ouvrirez de l'espace B A, & ferez un second arc qui coupera le premier au point D.

3°. Tirez ensuite les lignes droites C D & D A.

Problème XXIII.

Fig. 70. 100. Ayant la droite A B avec un angle oblique, construire un rhombe.

Remarque.

1°. Faites l'angle donné A à l'extrémité de la ligne A B (§. 48), & vous aurez $A C = A B$.

2°. De C & B, avec le compas ouvert depuis A jusqu'à B, faites l'intersection en D.

3°. Tirez ensuite les lignes C D & B D.

Problème XXIV.

101. Ayant les deux droites AB & AC , avec PL. III.
l'angle oblique A , construire un rhomboïde. Fig. 71.

Solution.

1°. Placez l'angle donné à l'extrémité A de la ligne AB (§. 48), & faites la droite AC égale à l'autre ligne donnée.

2°. De B , le compas ouvert de l'espace AC , faites un arc en D , & du point C faites un autre arc qui coupe le premier en D avec l'ouverture du compas AB .

3°. Tirez enfin les droites CD & DB .

Théorème XVI.

102. La diagonale AD partage le quarré, le rectangle, le rhombe & le rhomboïde en deux parties égales : les angles diagonalement opposés sont égaux, & les côtés opposés AB & CD , AC & BD sont paralleles entre eux. Fig. 72.

Démonstration.

Dans toutes ces figures on a $AC = BD$ & $CD = AB$ (§. 20). Les triangles ACD & ABD sont donc égaux. De même $x = x$ & $0 = 0$, $u = u$, (§. 51). Et par conséquent AB est parallele à CD , & AC à BD . (§. 73.) Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

103. Ainsi tous ces quadrilateres sont des parallelogrammes. (§. 23.)

Problème XXV.

104. Trouver l'angle d'un Polygone régulier.

Solution.

1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du polygone.

2°. Soustrayez de 180° le nombre qui en vient, le reste sera le nombre des degrés qui répond à l'angle donné.

E X E M P L E.

Pl. III. Dans l'exagone, 360 degrés divisés par 6 donnent 60 pour quotient, lequel soustrait de 180°, reste 120° pour l'angle ABC.
Fig. 73.

Démonstration.

Soit ABC que l'on cherche.

Décrivez un cercle par ces trois points ABC (§. 97) : comme on a $AB = BC$ (§. 21), les arcs AB & BC seront aussi égaux (§. 92). Or comme l'arc AD, moitié de l'arc ADC, est la mesure de l'angle B (§. 84), on trouve l'arc AD, ou l'angle B, en retranchant l'arc AB du demi-cercle BAD. Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XXVI.

105. Trouver la somme de tous les angles de quelque polygone que ce soit.

Solution.

1°. Multipliez 180 par le nombre des côtés.

2°. Soustrayez du produit le nombre 360, le reste sera la somme des angles.

EXEMPLE.

Pour le Pentagone. Pour l'Exagone.

$$\begin{array}{r} 180 \\ 5 \\ \hline 990 \\ 360 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ 6 \\ \hline 1080 \\ 360 \\ \hline 720 \end{array}$$

Démonstration.

D'un point pris dans quelque polygone que ce puisse être, on pourra faire de ce polygone autant de triangles qu'il aura de côtés. Si l'on multiplie donc 180 par le nombre des côtés du polygone, le produit sera la somme des angles de tous les triangles. (§. 74.)

Or tous les angles qui sont autour du centre F, & qui n'appartiennent pas aux angles du polygone, font toujours 360°. (§. 42.)

Si l'on retranche donc du produit trouvé la somme 360, le reste sera la somme des angles du polygone. Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XXVII.

106. Décrivez un polygone régulier, la droite AB étant donnée. Pl. IV. Fig. 75.

Solution.

Faites à chacune des extrémités AB des angles égaux, chacun en particulier, à la moitié de l'angle du polygone; de cette façon les côtés du trian-

gle isoscele ABC se couperont mutuellement au centre du cercle C .

2°. Du point C prenez avec un compas la longueur de CA pour servir de rayon au cercle dont vous décrivez la circonférence, que vous ferez passer par les deux points A B . Vous diviserez ensuite cette circonférence en autant de longueurs de la ligne donnée que vous pourrez.

Remarque.

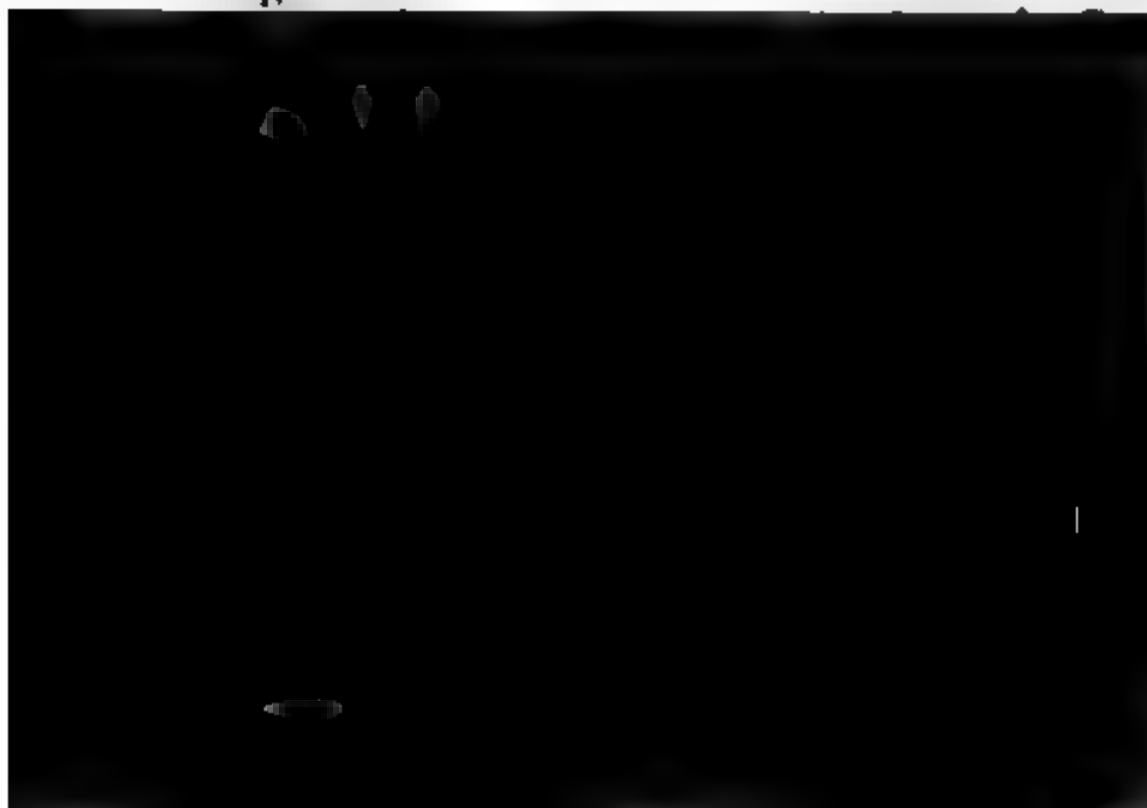
On trouve dans les érudis de mathématiques un demi-cercle gradué, c'est-à-dire divisé en ses 180° ; & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aisément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

Problème XXVIII.

107. Décrire un polygone régulier dans un cercle donné.

Solution.

Pl. IV. 1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du
Fig. 76. polygone demandé, afin d'avoir la quantité de l'angle ACB .



Démonstration.

L'Angle ACB est de 60° (§. 107), les autres A & B sont donc de 120° . (§ 77.)

Or $AC = BC$ (§. 27), on aura donc aussi $A = B$ (§. 79); & par conséquent chacun étant de 60° , sera égal à l'angle C . Donc AB sera égal à AC (§. 82). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

109. On décrira donc un exagone régulier dans un cercle, si on le divise par son rayon.

Corollaire II.

110. Si l'on veut construire un exagone sur une ligne donnée, il suffira d'y faire un triangle équilatéral (§. 53); car le sommet C est le centre du cercle dont la circonférence doit passer par les angles qui forment les côtés de l'exagone.

Problème XXIX.

111. Construire une figure dont on donne tous Pl. IV. les côtés, & autant de diagonales qu'il y a de Fig. 77. côtés, excepté trois.

Solution.

Toute figure se réduisant, par le moyen des diagonales, en autant de triangles qu'elle a de côtés, si on en excepte deux, il suffira de construire un triangle sur un autre. (§. 55.)

Problème XXX.

112. Construire une figure dont on a tous les côtés, & autant d'angles qu'il y a de côtés, excepté trois.

Solution.

Pl. IV. : 1°. Tirez la droite AB égale à un des côtés
Fig. 78. donnés ; aux deux extrémités A & B formez les
angles requis A & B (§. 48), auxquels vous ap-
pliquerez les côtés AE & BC .

2°. Si l'on fait en E un angle convenable, on
pourra appliquer le côté ED , & tirer ensuite la
droite DC .

3°. Ou bien on fera en D une intersection des
points E & C , & pour lors on aura la figure que
l'on demande.

Remarque.

113. Si l'on donne tous les angles excepté un,
il n'est pas nécessaire que l'on donne deux côtés.

Problème XXXI.

114. Trouver l'aire d'un quarré.

Solution.

Mesurez un côté & multipliez la longueur par
elle-même, vous trouverez dans le produit l'aire
du quarré.

E X E M P L E.

Soit le côté du quarré 345"

	345
	<hr/>
	1725
	1380
	1035
	<hr/>
L'aire fera	119025"

Démonstration.

Pour mesurer une superficie, il faut prendre la superficie elle-même pour mesure. Et comme le Pl. IV.
Fig 79. carré a tous les angles droits & les côtés égaux, on peut bien prendre le carré lui-même. Si l'on divise donc le côté AB en quatre parties égales, ou qu'il contienne 4 pieds, il est évident qu'on trouvera le nombre des pieds carrés contenus dans le grand carré $ABCD$, si l'on multiplie ce côté par lui-même; car on trouve dans chaque tranche du grand carré autant de petits que le côté AB a de divisions.

Corollaire I.

115. Si le côté du carré est divisé en dix parties, l'aire du carré en aura 100. Et comme une toise se mesureroit en long par dix pieds, si elle étoit composée de dix, le pied par dix pouces, &c. la toise de dix pieds carrés contiendrait 100 pieds de superficie, le pied carré 100 pouces, &c.

Corollaire II.

116. Un nombre donné se diviseroit alors facilement en pouces, pieds & toises carrées; à savoir en assignant de la droite à la gauche deux chiffres pour les toises, deux pour les pieds, deux pour les pouces, &c.

Exemple. 119025 pouces feroient 11 toises 90 pieds & 25 pouces.

Problème XXXII.

117. Trouver l'aire d'un rectangle.

*Solution.*Pl. IV.
Fig. 80.

1°. Mesurez la largeur A B & la hauteur B C.
2°. Multipliez la première par la seconde , le produit sera l'aire de la figure rectangulaire.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 \text{Soit } AB = 3^{\circ} \quad 4' \quad 5'' \\
 AD = 1 \quad 2 \quad 3 \\
 \hline
 10 \quad 3 \quad 5 \\
 69 \quad 0 \\
 345 \\
 \hline
 4^{\circ} \quad 24' \quad 35''
 \end{array}$$

Démonstration.

C'est la même que celle du Problème précédent.

Théorème XVIII.

Fig. 81. 118. Deux parallélogrammes ABCD, & EFDC, qui ont la même base & la même hauteur, sont égaux entre eux.

Démonstration.

AC étant égal à BD, EC = FD, & AE = BF (§. 20) & (§. 24, Arithm.), $\triangle AEC = \triangle BFD$ (§. 51); donc si l'on ôte de l'un & l'autre le triangle BEG, ABGC = EGDF (§. 25, Arithm.): mais si l'on ajoute à l'un & à l'autre le triangle CDG, on aura aussi ABCD = EFCD (§. 24, Arithm.) Ce qu'on avoit à démontrer.

Corollaire I.

119. Les triangles qui ont la même base & la même hauteur sont donc égaux.

Corollaire II.

120. Le triangle est donc la moitié du parallélogramme qui a la même ou une base semblable, & qui est entre les deux mêmes parallèles (§. 22).

Problème XXXIII.

121. Trouver l'aire d'un rhombe & d'un rhomboïde.

Solution.

1°. Ayant pris pour base le côté AB, abaissez dessus la perpendiculaire CE. (§. 69.) Pl. IV.
Fig. 82.

2°. Multipliez la base AB par la hauteur CE, le produit fera l'aire que l'on cherche.

E X E M P L E.

Soit $AB = 456''$

$CE = 234$

1824
1368
912

10° 67' 04''

Démonstration.

Le rhombe ou rhomboïde ABCD est égal au rectangle dont la base seroit AB, & la hauteur CE (§. 118, 103); or on trouve l'aire d'un rectangle si l'on multiplie AB par CE (§. 117):

on trouve donc aussi l'aire d'un rhombe ou d'un rhomboïde , en multipliant AB par CE . *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXXIV.

122. Trouver l'aire d'un Triangle.

Solution.

- Pl. IV.
Fig. 83.
- 1°. Abaissez la perpendiculaire CD sur le côté AB que vous aurez choisi pour base. (§. 69.)
 - 2°. Cherchez quelle est la longueur des lignes AB & CD , & multipliez-les l'une par l'autre.
 - 3°. Divisez le produit par deux , & vous aurez l'aire du triangle.

Démonstration.

En multipliant AB par CD , le produit fera l'aire du parallélogramme dont les côtés sont AB & CD . (§. 117, 121.)

Or comme le triangle est la moitié du parallélogramme (§. 120) , il faut donc partager en deux l'aire trouvée pour avoir l'aire du triangle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Multipliez la base AB par la moitié de la hauteur CD , ou la hauteur CD par la moitié de la base AB . Le produit fera l'aire du Δ , comme il paroît par l'exemple suivant.

$$\begin{array}{l} AB = 3^{\circ} 4' 2'' \quad AB = 3^{\circ} 4' 2'' \cdot \frac{1}{2} \quad AB = 1^{\circ} 7' 1'' \\ CD = 234 \cdot \frac{1}{2} \quad CD = 117 \quad CD = 234 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 1368 \\ 1026 \\ 684 \\ \hline 80028 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2394 \\ 342 \\ 342 \\ \hline 40014 \end{array}$	$\begin{array}{r} 684 \\ 513 \\ 342 \\ \hline 40014 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2) \hline 40014 \end{array} \text{ A C B.}$		

Problème XXXV.

123. Trouver l'aire de quelque figure rectiligne que ce soit.

Solution.

Comme toute figure, de l'angle B par les diagonales BE, BD, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtés, excepté deux, par exemple, le pentagone ABCDE est réduit en trois triangles ABE, BED & BCD : qu'on cherche donc l'aire de chaque triangle, selon le précédent, & qu'on fasse ensuite l'addition de ces trois aires, on aura celle du pentagone.

Ou si l'on abaisse les deux perpendiculaires CF & EG sur la même base BD, on trouvera l'aire du trapeze par une seule opération, en multipliant la moitié de la base BD par la somme des hauteurs EG & CF, ou la base entière par la moitié des hauteurs.

Pl. IV.
Fig. 84.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} BD = 4^{\circ} 3' & \frac{1}{2} BD = 4^{\circ} 3' & \frac{1}{2} EB = 4^{\circ} 2' \\ CF = 35 & EG = 45 & AH = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 215 \\ 129 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 215 \\ 172 \end{array}$$

$$\Delta AEB \ 1260$$

$$\begin{array}{rcl} BCD & 1505 & \Delta EBD \ 1935 \\ & & \Delta AEB \ 1260 \\ & & \Delta BCD \ 1505 \end{array}$$

$$\text{Aire de la figure} = 4700$$

Corollaire I.

Pl. IV. 124. Du centre d'un cercle décrit autour d'un
Fig. 85. polygone régulier, on réduit ce polygone en au-
tant de triangles égaux qu'il a de côtés : car les
bases de ces triangles AB, BE, EF, &c. (§. 21),
& leurs côtés AC, CB, CE, CF, CG sont
égaux entre eux (§. 27). Donc les triangles sont
égaux entre eux (§. 51.)

Or si l'on trouve l'aire d'un de ces triangles
(§. 122), & qu'on la multiplie par le nombre
des côtés du polygone, il est évident qu'on aura
dans le produit l'aire du polygone régulier.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} AB = 2^{\circ} 7' \\ DC = 2 \ 9 \end{array}$$

$$243$$

$$54$$

$$\Delta ABC \ 783$$

5 nombre des côtés

$$\text{Aire du pentagone} = 39^{\circ} 15'$$

Corollaire II.

125. On voit donc aussi qu'un polygone régulier est égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence de tout le polygone, & la hauteur égale à la perpendiculaire CD abaissée du centre C sur le côté AB . (§. 119.) Pl. IV.
Fig. 86.

Corollaire III.

126. Si l'on vouloit faire dans un cercle un polygone dont les côtés fussent infiniment petits, ils ne laisseroient pas de se trouver renfermés dans la circonférence de ce cercle, & pour lors la hauteur du triangle CD aura du rapport avec le rayon BC ; ainsi un cercle seroit égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle, & la hauteur au rayon. (§. 125.)

Corollaire IV.

127. Donc le Secteur d'un cercle ACB est égal à un triangle dont la base est l'arc AB , & la hauteur le rayon AC . Fig. 87.

Corollaire V.

128. Ayant donc la circonférence & le diamètre d'un cercle, on trouve l'aire de ce même cercle, en multipliant sa circonférence par la quatrième partie de son diamètre.

Remarque.

129. On a vu dans tous les siècles bien des gens

rechercher à l'envi, & prendre une peine infinie pour trouver le véritable rapport du diamètre d'un cercle à sa circonférence : en vain y ont-ils consacré la plupart de leurs veilles ; ils n'ont pu réussir jusqu'ici, quoique les Mathématiques soient aujourd'hui infiniment perfectionnées. Quelques-uns cependant ont essayé assez heureusement de déterminer ce rapport par approximation. Archimede dans son traité de la dimension du cercle, proposition seconde, a démontré le premier, que le rapport du diamètre à la circonférence est presque le même que celui de 7 à 22 ; mais comme ce rapport peche infiniment par excès dans les grands cercles, d'autres en ont voulu déterminer un plus exact. Personne n'y a plus travaillé que Ludolphe de Ceulen ou de Cologne, qui enfin a trouvé que supposant le diamètre d'un cercle de 100 000 000 000 000 000 000, sa circonférence est de 314 159 265 358 979 323 846, peu s'en faut.

Mais comme ces chiffres sont en trop grand nombre, & font une somme trop considérable pour s'en servir à faire un calcul, on prend seulement les trois premiers caracteres de chaque somme, & l'on suppose le rapport du diamètre à la circonférence, comme 100 à 314 : en quoi

des cercles, cette différence suffiroit pour les faire distinguer les uns d'avec les autres; ils ne seroient donc pas tous semblables entre eux, contre ce que nous avons démontré ci-dessus. (§. 34.)

Théorème XIX.

130. L'aire d'un cercle est au quarré de son diamètre comme 785 à 1000, ou peu s'en faut.

Démonstration.

Le diamètre supposé de 100 parties, la circonférence fera de 314 (§. 129); ainsi l'aire du cercle fera de 7850 (§. 128), & le quarré du diamètre 10000 (§. 114): par conséquent l'aire fera au quarré comme 7850 à 10000; & en divisant les deux sommes par dix, l'aire fera comme 785 à 1000. (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XX.

131. Les aires des cercles sont entre elles comme les quarrés des diamètres sont entre eux.

Démonstration.

L'aire d'un cercle est au quarré de son diamètre comme l'aire d'un autre cercle est au quarré de son propre diamètre (§. 129, 130). L'aire d'un cercle sera donc à l'égard de l'aire d'un autre cercle comme le quarré du diamètre de l'un est au quarré du diamètre de l'autre. (§. 83. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXXVI.

132. Le diamètre d'un cercle étant connu, trouver sa circonférence.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à 100, 314, & au diametre donné (§. 85. Arithm.) : ce nombre trouvé fera la circonférence que l'on cherche. (§. 129.)

Soit , par exemple , le diametre 56' :

$$\begin{array}{r}
 100 \text{ — } 314 \text{ — } 56 \\
 \quad \quad 56 \\
 \hline
 \quad \quad 1884 \\
 \quad 1570 \\
 \hline
 17^{\circ} 5' 8'' 4''' \text{ circonférence du cercle.}
 \end{array}$$

Problème XXXVII.

133. Ayant la circonférence d'un cercle (17584''') trouver son diametre.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à 314, 100, & à la circonférence 17584''' (§. 85 Arithm.) , on trouvera 56, qui est le diametre que l'on cherche.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 314 \text{ — } 100 \text{ — } 17584 \\
 \quad \quad \quad 100 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1758400 \\
 \\
 \begin{array}{r}
 18 \\
 202 \\
 2788400 \text{ — } 5^{\circ} 6' 0'' 0''' \text{ diametre.} \\
 314444 \\
 3111 \\
 33
 \end{array}
 \end{array}$$

Problème XXXVIII.

134. La circonférence d'un cercle étant connue, ou son diamètre, trouver l'aire de ce cercle.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence (§. 132), ou son diamètre (§. 133).

2°. Multipliez la circonférence trouvée par la quatrième partie du diamètre (§. 128).

Soit, par exemple, le diamètre 5600'', la circonférence sera 17584'', & par conséquent l'aire du cercle 24617600''.

Autrement.

Multipliez le diamètre 56' par lui-même, & cherchez un quatrième nombre proportionnel 246176'' (§. 85, Arithm.) à 1000, 785, & le carré trouvé du diamètre 3136, & vous aurez l'aire que vous demandez (§. 130).

Problème XXXIX.

135. Ayant l'aire d'un cercle, trouver son diamètre.

Solution.

1°. Cherchez un quatrième nombre proportionnel 313600 (§. 85, Arithm.) à 785, 1000, & à l'aire donnée 246176.

2°. Extrayez ensuite la racine carrée 560 (§. 77, Arithm.), cette racine extraite sera le diamètre cherché (§. 130).

Corollaire.

136. Sitôt qu'on connoîtra le diamètre d'un

cercle , on connoîtra aussi la circonférence par le problème 36 (§. 132).

Problème XL.

Pl. IV: 137. Ayant le rayon du cercle AC (6') avec la
Fig. 87. grandeur de l'arc AB (6°), trouver l'aire du Secteur ABC.

Solution.

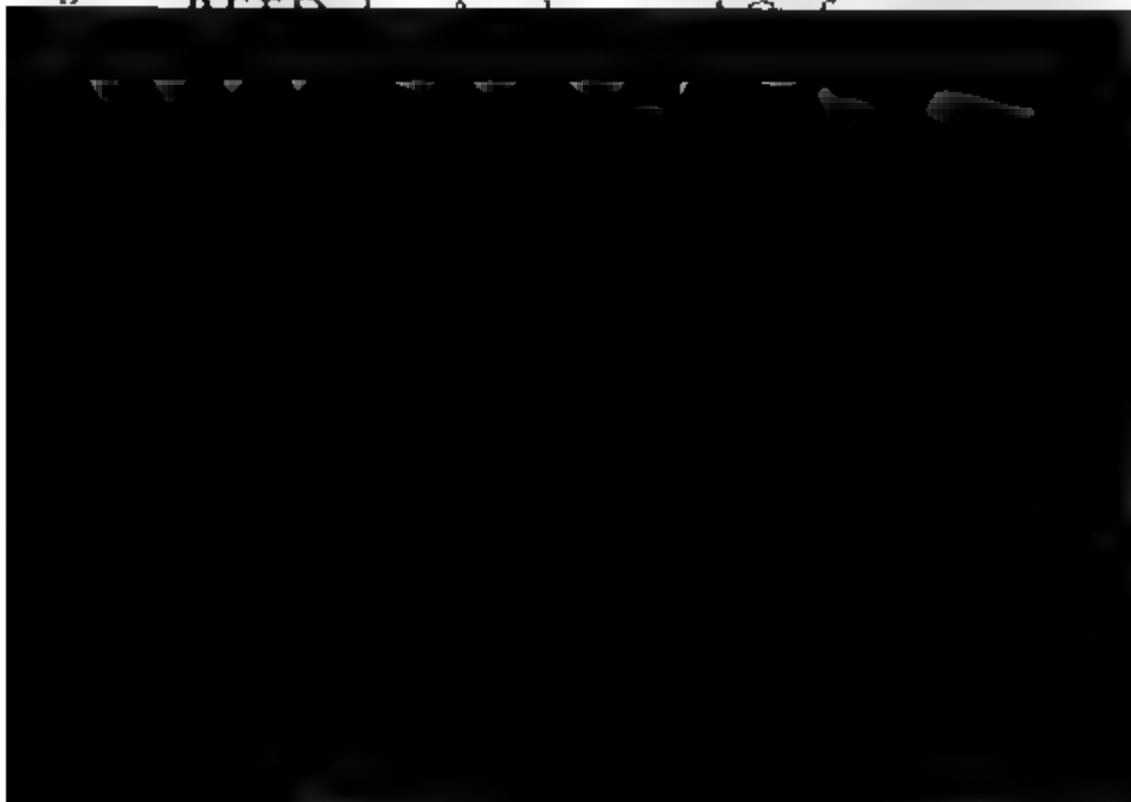
1°. Cherchez un quatrieme nombre proportionnel $1884'''$ (§. 85 Arithm.), à 100, 314, &c au rayon du cercle AC. Ce nombre trouvé est la moitié de la circonférence (§. 132 Géom.) & (§. 59 Arithm.)

2°. Cherchez ensuite un quatrieme nombre proportionnel $62\frac{2}{3}$ (§. 85 Arithm.) à 180°, à l'arc donné 6°, & à la moitié de la circonférence trouvée $1884'''$. Ce nombre proportionnel donnera dans les lignes l'arc AB.

3°. Multipliez ce nombre par la moitié du rayon 300'', le produit exprimera l'aire du secteur ABC $18840'''$ (§. 122, 127).

Théorème XXI.

Fig. 88. 138. Les deux parallélogrammes ABDC & DEED.



(§. 117). Ainsi ces deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits de AC par CD , & de AC par DF , c'est-à-dire comme CD à DF (§. 59 Arithm.) *Première partie du théorème qu'il falloit démontrer.*

On démontre de la même manière , que les parallélogrammes dont les bases sont égales , sont entre eux comme leurs hauteurs sont entre elles.

Corollaire.

139. Tout triangle pouvant être considéré comme la moitié d'un parallélogramme (§. 120) , les triangles de même hauteur seront entre eux comme leurs bases ; & ceux qui auront les mêmes bases seront en même raison que leurs hauteurs.

Problème XLI.

140. Diviser le parallélogramme ABEC en Pl. V. deux parties égales , en tirant un ligne droite du Fig. 89. point donné D.

Solution.

Faites $EF = AD$, & tirez la droite DF , vous aurez les trapezes ADFC & DBEF égaux entre eux.

Démonstration.

Les triangles ABC & BCE sont égaux (§. 102) : & comme AB est égal & parallèle à EC (§. 102) , & $EF = AD$, on voit que $o = x$, $y = u$ (§. 72) , & $FC = DB$ (§. 25 Arithm.) donc le $\triangle DBG = \triangle GCF$ (§. 50) , & par conséquent le trapeze ACFD est égal au trapeze DFEB (§. 24 , 25 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

l'angle ACE est égal à l'angle BCF . (§. 24 Arithm.), parceque $ACF = BCE = 90^\circ$ (§. 20, 37) : donc les triangles ACE & BCF sont égaux (§. 49), & par conséquent le quarré $BDEC$ sera aussi égal au rectangle $LCFK$ (§. 26 Arithm.)

Et comme on démontre par la même méthode que le quarré $AHIB$ est égal au rectangle $ALKG$, il est évident que les quarrés $AHIB$ & BDE pris ensemble équivalent le quarré $AGFC$. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

145. On nomme *Théorème de Pythagore* le Théorème ci-dessus, parcequ'on croit qu'il en est l'inventeur. Quelques-uns l'appellent le *Maître des Mathématiques*, à cause du grand usage qu'on en fait dans toutes les parties qui composent les Mathématiques.

Problème XLIV.

146. Construire un quarré égal à deux ou plusieurs pris ensemble.

Solution.

Pl IV. 1°. Joignez à angles droits les côtés de deux
Fig. 92. quarrés AB & BC (§. 70, 89).

2°. Tirez la ligne droite AC , qui sera le côté d'un quarré égal aux deux autres pris ensemble (§. 144).

3°. Elevez avec une équerre sur le côté du troisieme quarré CD la ligne $CE = CA$.

4°. Tirez la droite DE qui sera le côté d'un

quarré égal aux trois autres pris ensemble (§. 144).

Théorème XXIII.

147. Si les angles homologues d'une figure rectiligne sont égaux , & que les droites qui les séparent aient de part & d'autre le même rapport, les figures sont semblables : & si les figures sont semblables , les angles & les côtés seront comme nous venons de dire.

Démonstration.

Les figures rectilignes ne se distinguent que par la grandeur de leurs angles homologues , & le rapport qu'ont entre eux les côtés qui les séparent ; car on n'y connoît que cela distinctement. Si les angles sont donc égaux , & que les côtés aient entre eux le même rapport , on y voit précisément ce par quoi on les distingue. Ils sont par conséquent semblables (§. 4.)

Si deux figures sont semblables, on y remarque ce qui les fait distinguer : or on ne distingue les figures rectilignes que par la quantité de leurs angles homologues , & par le rapport que les côtés ont entre eux ; la grandeur des angles & le rapport des côtés doivent donc être les mêmes de part & d'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXIV.

148. Si dans les deux triangles ABC & DEF, Pl. IV.
B est égal à D & $C = E$, on aura $BA : AC =$ Fig. 93.
 $FD : EF$ & $AB : BC = FD : DE$; & si les côtés sont proportionnels , les angles homologues seront aussi égaux.

Démonstration.

Comme $B = D$, & $C = E$, & que de deux angles donnés avec un côté on peut construire un triangle (§. 60), les triangles BAC & DFE se font de la même manière; ils sont donc semblables (§. 33); par conséquent $BA : AC = FD : FE$, & $AB : BC = FD : DE$ (§. 147.) *Première partie démontrée.*

Dans la seconde, les trois côtés d'un triangle sont proportionnels aux trois côtés de l'autre, & de ces trois côtés on peut former un triangle (§. 55). Les triangles ABC & DFE se faisant par la même méthode, sont donc semblables (§. 33): par conséquent leurs angles homologues sont égaux. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXV.

Pl. IV.
Fig. 93.

149. Si dans le triangle ABC on tire la droite DE parallèle à la base BC , AD fera à AE comme AB à AC , & ce que BD est à EC , $AD : DE = AB : BC$.

Démonstration.

DE étant parallèle à BC , $\angle o = x$ & $\angle u = y$ (§. 72); de là $AD : AE = AB : AC$, & $AD : DE = AB : BC$ (§. 148); par conséquent parce que $AD : AB = AE : AC$ (§. 83, Arithm.), $AD : AE = BD : EC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XLV.

Fig. 94.

150. Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données AB & AC .

Solution.

1°. Faites à volonté l'angle EAD , & transportez la ligne AC de A en C ; & de A en B , aussi bien que du point C , transportez en E la ligne AB .

2°. De C en B , tirez la droite CB , & de E en D la droite DE parallèle à CB ; si l'on fait donc l'angle E égal à l'angle C (§. 8) (§. 73), BD fera la troisième proportionnelle que l'on cherche.

Problème XLVI.

151. Trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes données AB , AC , & BD . Pl. IV.
Fig. 95.

Solution.

1°. Formez à volonté l'angle EAD .

2°. Transportez la ligne AB de A en B , la ligne AC de A en C , & de B en D la ligne BD .

3°. Tirez de B à C la droite marquée BC .

4°. De D tirez l'autre droite DE parallèle à BD , comme dans le Problème précédent, & CE fera la quatrième proportionnelle. (§. 149.)

Théorème XXVI.

152. Si dans les deux triangles ABC & FDE , B est égal à D & $AB:BC = FD:DE$, A sera aussi égal à F , & $C = E$, & $BA:AC = DF:FE$. Fig. 93.

Démonstration.

Puisque $B = D$ & $AB:BC = FD:DE$, &

que de deux côtés réunis par un angle on peut former un triangle (§. 58) ; les triangles $A B C$ & $F D E$ se faisant par la même méthode , sont semblables (§. 33) ; par conséquent $A = F$, $C = E$ & $B A : A C = D F : F E$. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

153. Les Théorèmes sur la ressemblance & l'égalité des triangles sont d'une très grande utilité dans les mathématiques. Ils font trouver quantité de choses , particulièrement quand ils s'agit de pratiquer la géométrie sur un terrain ; car presque toute cette pratique est fondée sur ces principes , comme on le verra dans la suite.

Problème XLVII.

PL. V. 154. Diviser une ligne droite donnée en autant de parties qu'on voudra.
Fig. 96.

Solution.

1°. Tirez la droite $C D$ longue à volonté , & transportez-y autant de parties égales que vous en devez trouver dans la ligne donnée , par exemple, cinq.

2°. Construisez sur $C D$ un triangle équilatéral $C E D$. (§. 53.)

3°. Transportez de E en A & de E en B la ligne donnée à diviser , & tirez la droite $A B$ qui sera la ligne donnée.

4°. Tirez enfin des droites du sommet de l'angle à chaque point de division de la ligne $C D$,

& AF fera la cinquieme partie de la ligne donnée AB.

Démonstration.

Puisque $EA : EB = EC : ED$, on a $A = C$ & $EA : AB = EC : CD$ (§. 152). Or $EC = CD$: donc $EA = AB$; par conséquent $AB =$ à la ligne donnée. Comme donc $EA : AF = CD : CG$ (§. 148), c'est-à-dire, $AB : AF = CD : CG$, & $CG = \frac{1}{5} CD$, on aura aussi $AF = \frac{1}{5} AB$. (§. 53, Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Le triangle CED peut être considéré comme renfermé dans un cercle dont le centre seroit E, & le triangle AEB peut être aussi considéré comme renfermé dans un petit cercle concentrique au grand. Et comme tous les rayons partis du centre diviseront nécessairement la circonférence du cercle concentrique en autant de parties que la circonférence du grand cercle, il est évident que le petit triangle AEB est divisé par les rayons partis du centre, en autant de parties que le triangle CED; par conséquent la ligne donnée AB est divisée en cinq parties égales, parce que la ligne CD est divisée également en autant de parties. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XLVIII.

155. Couper une ligne droite donnée en même proportion qu'une autre CD a été coupée. Pl. V.
Fig. 97.

Solution.

1°. Formez un triangle équilatéral sur la ligne coupée C D. (§. 53.)

2°. Transportez la ligne donnée de E en A & B, tirez ensuite la droite A B qui sera égale à la ligne donnée.

3°. Tirez du sommet du triangle E des lignes droites aux points de division G, I. Ces lignes couperont la ligne A B en proportion requise.

Démonstration.

Elle est la même que celle du Problème précédent.

Remarque.

156. Le Problème précédent est d'un très grand usage tant dans l'architecture militaire que civile, particulièrement quand il s'agit d'agrandir ou de diminuer un plan.

Problème XLIX.

Pl. VI. 157. Diviser un parallélogramme ou un triangle en autant de parties égales qu'on voudra.
Fig. 109. & Pl. VII.
Fig. 110.

Solution.

1°. Divisez la base C D ou C B en autant de parties que la figure doit être divisée. (§. 154.)

Fig. 109. 2°. Si c'est un parallélogramme, tirez de chaque point de division 1, 2, des parallèles au
Fig. 110. côté A C. 1, 1. 2, 2. (§. 67). Si c'est un triangle,

ritez des droites des points de division 1, 2 au sommet A, & chaque figure sera divisée en parties égales. (§. 138. 139.)

Problème L.

158. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données AB & BE. Pl. VII.
Fig. 111.

Solution.

1°. Joignez en ligne droite & bout à bout les deux lignes données, & divisez leur longueur commune AE en deux parties égales au point C. (§. 90.)

2°. De C comme centre décrivez un demi-cercle dont le diamètre soit AE.

3°. Au point B élevez la perpendiculaire BD (§. 70), qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration.

L'angle ADE est droit (§. 86), ABD est aussi un angle droit (§. 18), l'angle DAB est commun aux deux triangles DAB & DAE. L'angle DAE est donc égal à l'angle DEB (§. 78). Or dans le triangle DEB, l'angle DBE est aussi droit (§. 18) : AB est donc à BD comme BD à BE. (§. 148.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

159. Si l'on prenoit une ligne pour une unité, & qu'on exprimât un nombre donné par une autre ligne, on pourroit en extraire facilement la racine

quarrée , en se servant de l'échelle géométrique , & de la méthode qu'on a employée dans le problème ci-dessus. (§. 74 , Arithm.)

Remarque I I.

160. On peut faire aussi la regle de trois par le moyen des lignes , en suivant ce que nous avons dit au Problème 46. (. 151.)

Problème L I.

Pl. VII. 161. La corde d'un arc A B , & sa hauteur D F
Fig. 112. étant données , trouver le diamètre E D , & par conséquent le centre du cercle C.

Solution & Démonstration.

1°. Cherchez une troisième proportionnelle à F C & F B (§. 85 , Arithm.) pour avoir E F D. (§. 158).

2°. Ajoutez à E F la hauteur de l'arc D F , & vous aurez le diamètre E D.

3°. Coupez le diamètre en deux parties égales pour avoir le rayon E C qui donne le centre.

E X E M P L E.

Soit D F 8' 3" F B 1° 6' 6".

$$\begin{array}{r}
 83 \text{ — } 166 \text{ — } 166 \\
 166 x \\
 \hline
 996 22 \\
 996 366 \\
 166 27886 \\
 \hline
 27556 88
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 332'' \text{ EF} \\ 83 \text{ DF} \\ \hline 415'' \text{ ED} \\ 2) 2075''' \text{ EC} \end{array} \right.$$

Remarque.

Remarque.

162. Ce problème est en usage dans l'Architecture civile, quand il s'agit de faire des portes & des fenêtres en forme d'arc.

Problème LII.

163. Ayant la corde d'un arc AB avec sa hauteur DF , trouver l'aire du segment $ADBFA$.

Pl. VII.
Fig. 112.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le diamètre DE (§. 161), décrivez ensuite le cercle, auquel vous appliquerez la corde AB .

2°. Mesurez avec le rapporteur l'angle ACB (§. 43).

3°. De la corde donnée AB & de la différence FC qui se trouve entre la hauteur de l'arc FD & le rayon DC , cherchez l'aire du triangle ABC (§. 122).

4°. Soustrayez enfin le triangle ACB du secteur $ACBDA$, le reste fera le segment $ADBFA$.

Soit pour exemple,

AB 600'', DF 80''; DE fera 1205'', l'arc AB 60°, l'aire du secteur $ACBDA$ fera donc 189630''. Or comme FC 522'', AF 300'', le Δ ACB fera 156600'', & par conséquent le segment $AFBDA$ 33030''.

Problème LIII.

164. Construire l'échelle géométrique.
Tome I.

P.

Règle.

Pl. V.
Fig. 98. 1°. Tirez la droite A E ; transportez sur cette ligne dix parties égales prises à volonté , en commençant depuis A , la dixième sera B. Vous prendrez ensuite la distance A B que vous transporterez de B en E autant de fois qu'il vous plaira.

2°. Elevez au point A la perpendiculaire A C , que vous diviserez aussi en dix parties égales & arbitraires (§. 70).

3°. De chaque point de division menez des parallèles à A E (§. 67) , & sur la dernière C F vous transporterez de C en D les dix parties égales A B.

4°. Joignez par des lignes droites la première partie à gauche marquée 10 avec la seconde à droite marquée 9 , puis 9 de la gauche avec 8 de la droite , ensuite 8 de la gauche avec 7 de la droite ; & ainsi de suite comme la figure le marque.

Il est évident que si A B est supposé être une longueur de dix pieds , les parties B 1 ; 1 , 2 ; 2 , 3 , &c. seront des pieds. A l'égard des petits chiffres qui sont au haut de la figure sur les divisions perpendiculaires , 9.9 vaudra un pouce ; 8.8 deux pouces ; 7.7 trois pouces ; 6.6 quatre pou-



me $A\gamma = \frac{1}{10} AC$, on aura donc $\gamma\gamma = \frac{1}{10} C\gamma$, & par conséquent un pouce (§. 9), &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

La mesure géométrique étant divisée en dix, on peut considérer ces parties comme des pieds. Mais dans ce cas ; pour entendre la démonstration précédente, il faut supposer que le pied n'est composé que de dix pouces ; ce dont il faut bien se souvenir, parceque M. Wolf se servant communément de cette maniere de compter, la plupart de ses calculs, solutions, ou démonstrations seroient inintelligibles sans cette attention. J'ai cependant réduit presque par-tout ses calculs à la maniere de compter usitée en France.

Corollaire.

165. Si l'on met donc la jambe d'un compas sur la troisieme ou septieme ligne, & qu'on l'ouvre jusqu'à ce que l'autre jambe tombe sur la ligne droite menée au-dessous de la cinquieme division, cette ouverture donnera 5 pieds 3 ou 7 pouces. Ou bien si je veux avoir 2^e 3" & 5", je poserai une jambe du compas sur la cinquieme parallele à AE au point I, & j'ouvrirai le compas jusqu'à ce qu'il rencontre K sur la même parallele : cette ouverture de compas me donnera ce que je demande.

Problème LIV.

166. Mesurer la distance des deux lieux A & B accessibles par un troisieme C.

Pl. V.
Fig. 99.

1°. Posez en C le graphometre ou table géométrique sur laquelle vous choisirez le point c .

2°. De ce point, par le moyen des pinnules, visez au point A, & menez la droite ca .

3°. Bornoyez ensuite du point c vers B, & menez la droite cb .

4°. Mesurez les toises qui se trouvent depuis C jusqu'à A, & depuis C jusqu'à B; transportez ces mesures, au moyen de l'échelle géométrique, de c en a & de c en b .

5°. Mesurez enfin sur la même échelle la ligne ab , qui marquera la distance que vous cherchez.

Démonstration.

L'angle c étant commun aux deux triangles acb & AcB , & les côtés qui le forment étant aussi proportionnels, on doit conclure que ab est à AB comme ca est à cA (§. 152). Or ca contient autant de parties de l'échelle ou petite mesure que cA en contient de la grande : ab contiendra donc autant de parties de la petite mesure que AB en contiendra de la grande dont on s'est servi sur le terrain.

Autre solution.

1°. Ayant posé le graphometre en C, mesurez l'angle AcB (§. 43).

2°. Mesurez aussi les lignes cA & cB (§. 44).

3°. A l'aide du rapporteur & de l'échelle géométrique construisez l'angle acb (§. 58).

4°. Mesurez la ligne ab sur l'échelle géométrique (§. 164), vous connoîtrez par là combien la ligne AB contient de toises, pieds & pouces, &c.

Démonstration.

Elle revient au même que celle que j'ai donnée à la première solution.

Problème LV.

Pl. V.
Fig. 100.

167. Trouver la distance de deux lieux A & B, dont un seul A est accessible.

Solution.

1°. Ayant posé le graphometre dans un lieu choisi à volonté C, dirigez votre vue par les pinnules du point c vers les deux points A & B.

2°. Cherchez la distance de C au point accessible A.

3°. Transportez cette distance avec une échelle géométrique de c en a (§. 164).

4°. Placez ensuite le graphometre au point A, en sorte que a soit précisément sur A, & que vous puissiez voir un piquet planté au point C par les pinnules dirigées de a vers c .

5°. Bornoyez alors de a vers B, & tirez la droite ab .

6°. Prenez enfin sur l'échelle géométrique (§. 164) la distance de ab , qui vous fera connoître celle de A B.

Démonstration.

Puisque l'angle $c = C$ & l'angle $a = A$, ac sera à l'égard de AC comme ab est à AB (§. 148). Or la ligne ac contient autant de parties de l'échelle géométrique, ou petite mesure, que la ligne AC en contient de la grande : ab doit donc contenir autant de parties de la petite me-

sure , ou échelle géométrique , que *AB* en renferme de la grande. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Pl. V.
Fig. 100.

On entend par *grande mesure* une toise ou perche , qui seroit divisée en pieds , pouces , &c. comme elles le sont communément. Il faut aussi remarquer que si l'échelle géométrique ou petite mesure dont on se sert est divisée par 10 , il faudra , ou que la perche qui sert à mesurer en grand les distances , soit aussi divisée par 10 pieds ou parties , ou faire la réduction en comparant la grande mesure avec la petite. Par exemple , supposé qu'on se serve d'une toise ordinaire composée de 6 pieds qui contiennent chacun 12 pouces , pour mesurer la distance *cA* de l'exemple ci-dessus , & que cette distance soit de six toises 4 pouces : si mon échelle géométrique , au lieu d'être divisée par toises de six pieds , est divisée par mesures géométriques de dix parties , qu'on peut considérer comme des pieds ; pour réussir à comparer proportionnellement le nombre des toises qui se trouvent dans la distance *cA* avec le nombre des parties qui sont comprises dans l'échelle géométrique , dont les divisions sont de dix en dix , il faudra dans ce cas réduire les toises en pieds , &



Autre maniere de résoudre le problème ci-dessus.

1°. Mesurez avec le graphometre les angles C & A (§. 43), & la longueur A C. (§. 44.) Pl. V
Fig. 100.

2°. De ces distances connues construisez le triangle acb (§. 60), par le moyen du rapporteur & de l'échelle géométrique.

3°. Mesurez ensuite la ligne ab selon les divisions de l'échelle géométrique, & vous connoîtrez ainsi la distance A B.

Démonstration.

Elle est la même que celle que j'ai donnée en dernier lieu.

Problème E V. I.

168. Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles A B. Fig. 101.

Solution.

1°. Ayant choisi les deux stations C & D, placez le graphometre à la premiere C, & plantez un piquet à l'autre.

2°. Du point C bornoyez par les pinnules vers le piquet D, & puis du même point C ayant aussi bornoyé vers B & A, tirez les lignes droites sur le graphometre.

3°. Prenez la distance des stations C, D (§. 44), & portez-la sur le graphometre de c en d , par le moyen de l'échelle géométrique.

4°. Visez de D vers A & B, & tirez sur le graphometre les droites da & db .

5°. Prenez ensuite la distance ab sur l'échelle géométrique (§. 164), & vous connoîtrez ainsi la distance AB .

Démonstration.

Comme l'angle d est commun aux deux triangles $dc b$ & $DC B$, & que l'angle c est égal à l'angle C , cd est à CD comme bc est à BC (§. 148). D'ailleurs comme par la même raison le triangle acd est semblable au triangle ACD , cd sera à CD comme ac est à AC (§. 148); & par conséquent bc est à BC , comme ac à AC . (§. 57, Arithm.)

Or l'angle acb étant égal à l'angle ACB , ab sera à AB come ac est à AC (§. 152), ou cd à CD (§. 57, Arithm.). Et comme dans l'échelle géométrique autant de parties répondent à la droite dc , qu'il s'en trouve dans la grande mesure qui répondent à la droite DC , il en faut autant dans l'échelle géométrique qui répondent à la ligne ab , qu'il s'en trouvera qui répondent à AB dans la grande mesure dont on s'est servi sur le terrain.

Autre solution du même problème.

Pl. VI. 1°. Mesurez les angles x & y de la première
Fig. 102. station C , & les angles z & w de la seconde D
(§. 43); leurs sommes donneront les angles ACD
& BDC .

2°. Prenez ensuite la distance de CD (§. 44), que vous porterez sur le papier au moyen de l'échelle géométrique, & avec les angles x & $z + w$, formez le triangle BCD , puis l'autre ACD avec les angles z & $x + y$. (§. 60.)

3°. Mesurez enfin la ligne A B sur l'échelle géométrique, & vous trouverez la distance que vous cherchez.

Démonstration.

On démontre cette seconde solution par le même raisonnement que l'on a apporté pour démontrer la première.

Remarque.

169. On mesurera diverses distances par la même méthode, si de deux stations marquées on borioie à chaque lieu en particulier.

Problème L V I I.

170. Mesurer la hauteur accessible A B.

Pl. VI.
Fig. 103.

Solution.

1°. Prenez un point D dans la campagne sur lequel vous élevez verticalement votre graphometre ou *planchette*, de façon que le côté inférieur soit parallèle à l'horizon : situation qu'on lui donnera avec un *niveau*.

2°. Ayant appliqué horizontalement une règle avec des pinnules sur le centre, vous borioerez à travers, du côté de l'endroit dont vous cherchez à connoître la hauteur, & vous menerez ensuite la droite a E.

3°. Tournez la règle autour du point a jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules, vous apperceviez le sommet de la hauteur A, & pour lors vous menerez sur le graphometre la droite a b.

4°. Mesurez la distance qu'il y a depuis a jus-

ques au bas de la hauteur C (§. 44), & portez-la sur le graphometre de a en E , par le moyen de l'échelle géométrique.

5°. Elevez au point E la perpendiculaire Eb (§. 70), qui marquera par son application sur l'échelle géométrique la hauteur AC . (§. 164.)

6°. Ajoutez à cette hauteur celle de CB , & la somme fera celle que vous demandez.

Démonstration.

L'angle a est commun aux deux triangles Eab & CaA : les angles E, C sont droits : ainsi aE est à aC comme bE est à AC (§. 148). Or Ea contient autant de parties de l'échelle géométrique que aC en contient de la grande mesure ; Eb contiendra donc nécessairement autant de parties de l'échelle géométrique, que AC en contient de la grande mesure dont on s'est servi pour mesurer le terrain.

Autre solution du même problème.

Pl. VI. 1°. Mesurez l'angle a (§. 43), & la distance
Fig. 103. des stations aC ou DB . (§. 44.)

2°. De ces mesures trouvées, formez le triangle $e ba$. (§. 60.)

3°. Prenez la mesure de la hauteur be sur l'échelle géométrique, & vous aurez la hauteur AC .

4°. Ajoutez à AC la hauteur de l'instrument, la somme vous donnera la même hauteur AB .

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque.

171. On suppose dans toutes ces solutions de problème que la ligne DB est horizontale : car si l'instrument étoit posé plus haut ou plus bas que la hauteur AB , il faudroit aussi mesurer l'angle CAB , & construire le triangle CAB sur le papier par le moyen de l'échelle géométrique, puis l'ajouter à la hauteur, si l'instrument est plus haut, ou l'en retrancher, s'il étoit placé plus bas que A .

Problème LVIII.

172. Mesurer une hauteur inaccessible AB . Pl. VI.
Fig. 104.

Solution.

1°. Après avoir choisi à volonté les deux stations D & E , comme dans le problème précédent, bornoyez vers la pointe A , & le bas C , étant placé à la première station D .

2°. Mesurez la distance des deux stations E, D (§. 44.), & portez-la, par le moyen de l'échelle géométrique, du point f , qui doit répondre perpendiculairement sur D , au point e . (§. 164.)

3°. Transportez le graphometre de D en E , & posez-le de façon que e soit précisément sur E , & visez ensuite au piquet que vous aurez planté en D , & au sommet A .

4°. Au point où la droite ea coupe la droite fa , abaissez une perpendiculaire ac sur fe (§. 69.), qui, portée sur l'échelle géométrique, donnera la hauteur AC .

5°. Ajoutez à AC la hauteur BC , la somme fera la hauteur AB que l'on demande.

Démonstration.

On démontre cette solution comme celle du problème précédent.

Autre méthode pour résoudre le même problème.

Pl. VI.

Fig. 104.

1°. Mesurez à la première station D l'angle f , & à la seconde E l'angle e (§. 43) ; prenez aussi la distance des stations E, D (§. 44) que vous transporterez sur le papier selon l'échelle géométrique (§. 164.)

Fig. 105.

2°. Construisez-y le triangle $f e a$ par le moyen des angles e & f . (§. 60.)

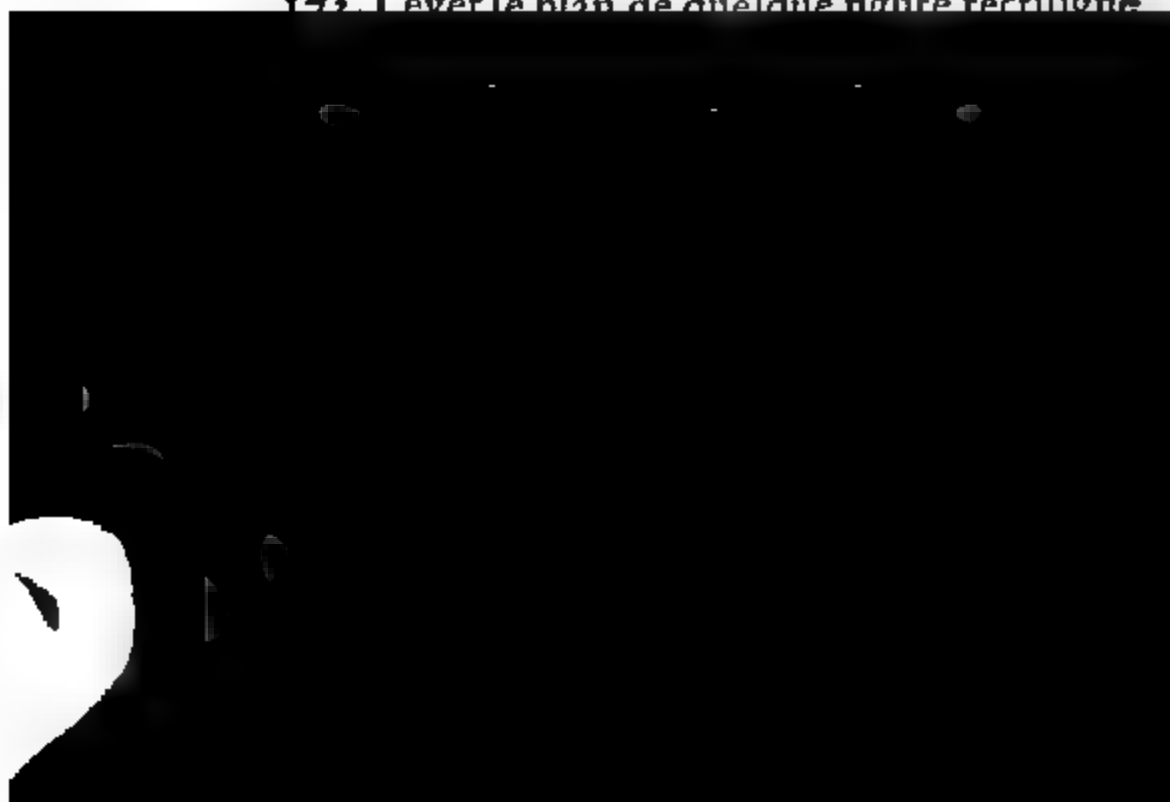
3°. Prolongez la base $f e$ jusques en c , & abaissez de a la perpendiculaire $a c$. (§. 69.)

4°. Mesurez enfin $a c$ sur l'échelle géométrique (§. 164), & ajoutez la hauteur de l'instrument d'où vous avez pris la quantité des angles, ou faites attention à ce que nous avons dit (§. 171), & vous aurez ainsi la hauteur que vous souhaitiez.

La démonstration est la même que la précédente.

Problème L I X.

172. Lever le plan de quelque figure rectiligne



trique , & vous en formerez votre figure. (§. 164 & 111.)

Démonstration.

Lorsqu'on veut transporter le plan d'une figure sur le papier , on doit l'y dessiner de façon que chaque angle & chaque côté de la figure dessinée soient égaux en petit à chaque angle & chaque côté de la grande figure auxquels ils répondent. Si donc pour faire chaque côté des triangles $A B C$, $A C D$, $A D E$, on prend sur l'échelle géométrique autant de parties qu'il s'en trouve sur le terrain qui forment chaque côté de la grande figure, les côtés de la petite seront entre eux comme les côtés de la grande. Car si, par exemple, le côté AB en a 6 & BC 7 sur le terrain , le côté AB sur le papier en aura aussi 6 , & BC 7 : & par conséquent tant dans l'une que dans l'autre figure, AB sera à BC comme 6 est à 7 : les angles & les côtés de la petite figure seront donc égaux proportionnellement à ceux de la grande (§. 148) ; & puisque les angles de la figure conviennent avec ceux des triangles , il faut nécessairement que les angles de la petite figure soient égaux à ceux de la grande qui est sur le terrain. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode pour résoudre le problème.

1°. Placez le graphometre à un point F choisi dans la figure. Pl. VI.
Fig. 107.

2°. Bornoyez du point F vers chaque piquet que vous aurez eu soin de planter auparavant à chaque angle de la figure A, B, C, D, E ; menez ensuite les droites $F a, F b, F c, F d, F e$.

3°. Prenez la mesure des lignes FA , FB , FC , FD , FE . (§. 144.)

4°. Déterminez, par le moyen de l'échelle géométrique, les lignes Fa , Fb , Fc , &c. (§. 164.)

5°. Menez enfin les lignes droites ab , bc , cd , de , & ea ; & vous aurez sur le papier le plan de la figure ABC , &c.

Démonstration.

Dans le triangle aFb on voit que Fa est à Fb comme FA est à FB dans le triangle AFD , & que l'angle F est commun aux deux triangles : Fb est donc à FB comme ba est à BA (§. 152). On démontre par la même raison que Fb est à FB , comme bc à BC (§. 57, Arithm.). D'ailleurs l'angle ABC est égal à l'angle abc (§. 152). Et comme on démontre par la même raison que les autres angles c , d , e , a , sont égaux aux angles C , D , E , A , & que les autres côtés sont entre eux comme les côtés CD , DE , EA , il est évident que le plan est juste. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Troisième méthode.

Pl. VI.
Fig. 107.

1°. Du point F mesurez les angles AFB , BFC , CFD , DFE , EFA . (§. 43). Mesurez aussi les lignes FA , FB , FC , FD & FE . (§. 44.)

2°. Portez les angles (§. 48) & les lignes sur le papier par le moyen de l'échelle géométrique. (§. 164.)

3°. Mesurez les droites ab , bc , cd , de & ea , & vous aurez la figure telle que vous la demandez.

Démonstration.

Voyez la précédente.

Problème LX.

174. Lever le plan de la figure $A B C D E$ que pl. VI.
l'on peut voir toute entière des deux stations A Fig. 108.
& B .

Solution.

1°. Ayant posé votre graphometre en A , bornez vers tous les angles de la figure, B , C , D & E , & menez des lignes du point A vers tous ces angles.

2°. Mesurez la distance des stations A , B (§. 44), & portez-les sur le graphometre par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164) de A en b .

3°. Transportez l'instrument de A en B & placez-le de façon que le point b réponde perpendiculairement à B , & qu'en visant par les pinnules de la regle appliquée sur la ligne $b A$, vous puissiez voir le piquet que vous aurez eu soin de planter en A après en avoir ôté le graphometre.

4°. Visez ensuite de B vers tous les autres angles de la figure en particulier, & menez des droites qui couperont les premières en e , d , c .

5°. Tirez enfin les droites $e d$, $d c$, après quoi le plan sera levé.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du problème 56. (§. 168.)

Seconde méthode.

Pl. VI. 1°. De A mesurez les angles CAB , DAC ,
Fig. 108. EAD ; & de B mesurez aussi les angles EBA ,
 DBE , CBD (§. 43), puis encore la distance
 AB . (§. 44.)

2°. Marquez sur le papier la ligne ab , & par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164), portez-y la longueur de la ligne AB .

3°. Transportez en bac , cad , dae , les angles CAB , DAC & EAD : & en abe , ebd , dbc les angles AEB , EBD , DBC . (§. 48.)

4°. Joignez enfin par des droites les points a , e , d , c , b , & pour lors vous aurez tout le plan de la figure.

Démonstration.

Voyez celle du problème 56. (§. 168.)

Problème LXI.

Fig. 108. 175. Lever le plan d'une figure dont on peut faire le tour, comme $ABCDE$.

Solution.

1°. Après avoir placé le graphometre au point A , bornoyez vers les piquets plantés en B & E , afin de pouvoir marquer sur ce point l'angle BAE ou bae .

2°. Prenez la mesure des droites AB & AE (§. 44), & transportez-la sur le graphometre de a en b & e , à l'aide de l'échelle (§. 164.)

3°. Transportez l'instrument en B , de maniere que b soit perpendiculaire à B , bornoyez ensuite vers A & vers C , afin de pouvoir marquer sur le graphometre l'angle BCA .

4°.

4°. Prenez la mesure de la ligne BC (§. 44), & portez-la sur l'instrument de *b* en *c* (§. 164); & en faisant ainsi le tour de la figure vous en aurez levé tout le plan.

Démonstration.

Tous les angles de la figure marquée sur le graphometre sont égaux à ceux de la figure représentée sur le terrain, & les côtés de la petite sont entre eux comme les côtés de la grande : la petite est donc semblable à la grande (§. 147). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Mesurez tous les côtés (§. 44) & autant d'angles qu'il y a de côtés, excepté trois (§. 43) : car il est aisé de lever un plan dont on connoît les côtés & les angles (§. 112).

Problème LXII.

176. Trouver l'aire de quelque terrain ou champ que ce puisse être.

Solution.

- 1°. Levez d'abord le plan du terrain selon la méthode marquée dans les problèmes précédents.
- 2°. Cherchez l'aire de la figure selon la solution du problème 35 (§. 123).

DÉFINITION XVI.

177. La sphere se forme en faisant tourner le demi-cercle ACB autour du diametre AB. Pl. VII.
Fig. 115.

Corollaire.

178. Tous les points de la superficie d'une

sphère sont donc dans une égale distance du centre (§. 13).

D É F I N I T I O N X V I I .

Pl. VII.

Fig. 114.

179. Une figure rectiligne $A B C$, dont les lignes droites $A D$ sont portées de haut en bas, ou de bas en haut, par un mouvement toujours parallèle à lui-même, représente un *prisme*, qui est un corps solide terminé aux deux bouts par des plans polygones, égaux, semblables & parallèles, & dans sa longueur par autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés aux deux polygones qu'on nomme les *bases*. Quand ces deux bases sont des triangles, le prisme se nomme triangulaire; tel est celui qui est représenté dans la figure citée à la marge.

Remarque.

On nomme *prismatique* ce qui a la figure d'un prisme, ou qui a quelque rapport au prisme, & *verres prismatiques* ceux dont on se sert pour séparer les rayons de la lumière. On appelle aussi *couleurs prismatiques* les rayons colorés de lumière qu'un prisme de verre fait appercevoir.

Fig. 115:

Si le cercle X est porté de bas en haut, ou de haut en bas en suivant la droite $F G$, il forme la figure d'un cylindre: la même chose arrive quand

Fig. 116.

un rectangle $A B C D$ ou un quarré tourne autour de sa hauteur $B C$.

Corollaire I.

180. Tout cylindre est donc un solide composé de plusieurs plans circulaires égaux & concentriques: le premier & le dernier de ces cercles prendront le nom de *bases*, & la ligne $B C$, qui passe

par tous les centres, se nomme l'*axe* du cylindre.

Cylindrique se dit d'une figure ou corps solide qui a la forme d'un cylindre ; ce qui doit s'entendre d'une cavité comme d'un corps solide. Pl. VII.
Fig. 115.

Un corps de pompe doit être intérieurement bien cylindrique. Tout prisme a deux bases & est terminé tout à l'entour par autant de parallélogrammes que sa base a de côtés.

Corollaire II.

181. Toutes les sections d'un prisme ou d'un cylindre , parallèles à la base , sont égales entre elles.

DÉFINITION XVIII.

182. Si le rectangle ABCD est porté en droite ligne de A en E , il décrit un *parallélipipede* ; & si le quarré O est pareillement porté de H en I , il forme le *cube*. Fig. 117.
Fig. 118.

Corollaire I.

183. Le parallélipipede est donc terminé par six rectangles , dont les deux côtés opposés sont égaux entre eux , & les sections de la base sont parallèles entre elles.

Corollaire II.

184. Le cube ou *exaëdre* est donc terminé par six faces ou quarrés égaux entre eux : tel est un dé à jouer.

DÉFINITION XIX.

185. Si le triangle rectangle ABC fait une révolution sur un de ses côtés immobile AB , il décrit le *cône*. Fig. 119.

Corollaire.

186. Toutes les sections parallèles à la base d'un cône sont des cercles, d'autant plus petits qu'ils approchent plus du *sommet* ou de la *pointe* A. La ligne AB se nomme *axe* du cône, & le cercle DBC sa *base*.

Pl. VII.
Fig. 120. On appelle aussi *cône* un solide qui est produit par le mouvement d'un triangle obliquangle, c'est-à-dire qui n'a point d'angle droit : & alors pour le distinguer d'avec le précédent, que l'on peut appeller *cône droit*, on le nomme *cône incliné* comme GHI, qui est produit par le mouvement du triangle obliquangle GOH autour du côté immobile GO.

D É F I N I T I O N X X.

Fig. 121. 187. Si l'on mène la droite AD, fixée par une de ses extrémités au point D, tout autour de la circonférence d'une figure rectiligne ABC, elle décrit la figure d'une *pyramide*.

Corollaire.

188. La *pyramide* est un solide à plusieurs faces, qui a pour *base* une figure rectiligne, & qui est terminé par autant de triangles que la base a de côtés, mais qui vont toujours en diminuant aboutir au point D. Si la figure ABC est circulaire, le mouvement de la droite AB formera un *cône*.

D É F I N I T I O N X X I.

189. Un *corps régulier* est un solide terminé par des plans égaux, réguliers, de même espèce, dont les angles solides sont égaux entre eux. Les autres corps se nomment *irréguliers*.

DÉFINITION XXII.

190. Outre le cube (§. 182) il y a encore quatre autres sortes de corps réguliers, à savoir le *Tétraèdre* composé de quatre triangles équilatéraux; l'*Octaèdre*, de huit; l'*Icosaèdre*, de vingt; & le *Dodécaèdre* formé par douze pentagones. Pl. VII.
Fig. 122, 123, 125 & 126.

Problème LXIII.

191. Déterminer la solidité d'un cube.

Solution.

On mesure les solides avec une *perche cubique*, c'est-à-dire, un cube dont chaque côté est une perche de long & de large, qu'on nomme encore *perche courante*. Elle se divise en pieds, en pouces, &c. cubiques. Les premiers sont cubes, dont un côté est égal à un pied; & les seconds sont aussi cubes, quand leur côté est égal à un pouce.

Quand vous voudrez donc déterminer la solidité d'un cube,

1°. Mesurez un côté du cube, & le multipliez par lui-même, le produit donne la base (§. 114, 184).

2°. Multipliez ce produit par les côtés, & le second produit donnera la solidité du cube.

3°. Si vous multipliez la base par six, vous aurez la surface de tout le cube (§. 184).

E X E M P L E.

<p>Côté</p> $ \begin{array}{r} 34' \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline \text{Base } 1156 \\ 6 \\ \hline \text{Superf. du cube } 6936' \end{array} $	<p>Base</p> $ \begin{array}{r} 1156' \\ 34 \\ \hline 4624 \\ 3468 \\ \hline \text{Solid. du cube } 39304' \end{array} $
--	--

Démonstration.

Pl. VII.
Fig. 127. Si l'on forme, par imagination, un cube dont un côté est divisé en parties égales, il est évident qu'il en naîtra autant de lits de moindres cubes, posés les uns sur les autres, que la hauteur aura de parties. Il n'est pas moins constant que chaque lit contiendra autant de petits cubes que la base contiendra de quarrés. D'où l'on doit conclure, qu'en multipliant la base par la hauteur, le produit donnera le nombre des moindres cubes contenus dans le plus grand. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

192. Si donc le côté d'un cube est de dix, sa solidité fera de mille. Si un côté contient dix pieds cubes, il s'en trouvera par conséquent mille dans le grand cube. Ainsi la perche cubique contient donc 1000 pieds cubiques, le pied cubique 1000 pouces cubiques, le pouce cubique 1000 lignes cubiques.

Remarque.

Ne perdez pas de vue ce que nous avons dit dans la remarque qui suit immédiatement la démonstration de la solution du problème 55 (§. 167).

Théorème XXVII.

193. Les parallélipèdes, les prismes, les cylindres, dont les bases & les hauteurs sont égales, sont aussi égaux.

Démonstration.

Si on coupe par imagination un parallélipède, un prisme, un cylindre en forme de *disques* de si petite épaisseur qu'on puisse les imaginer, ces disques seront non seulement égaux entre eux (§. 181, 183); mais il arrivera même que si deux corps ont la même hauteur, on pourra tirer autant de disques de l'un que de l'autre: ces corps occuperont donc un espace égal; ce qui est évident par la seule supposition de l'égalité de leur hauteur & de leur base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème LXIV.

194. Mesurer la solidité & la superficie d'un parallélipède.

Solution.

1°. Multipliez la longueur AB par la largeur Pl. VII. BC, pour trouver la base ABCD (§. 117, 183). Fig 128.

2°. Si vous multipliez cette base par la hauteur BF, vous aurez la solidité.

Soit , par exemple , $AB\ 36'$ $BC\ 15'$ $BF\ 12'$

longueur $AB\ 36$ base 540

largeur $BC\ 15$ hauteur 12

180

1080

36

54

Base ABCD 540

solidité 6480

Pour la superficie.

1°. Multipliez AB par BC , & AB par BF , & BF par BC , pour avoir les quadrilateres BD , EB , BG (§. 117, 183).

2°. Ajoutez ces trois quadrilateres, & multipliez la somme par 2 ; le produit sera la superficie du parallépipede (§. 117, 183).

E X E M P L E.

$AB\ 36'$
 $BC\ 15$

$AB\ 36'$
 $BF\ 12$

$BC\ 15'$
 $BF\ 12$

180

72

30

36

36

15

$\square DB\ 540$

$\square BG\ 432$

$\square BE\ 180'$

$\square BG\ 432$

$\square BE\ 180$

$1152'$

2

$2304'$ Superficie du parallépipede.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente (§. 191).

Théorème XXVIII.

195. Le plan diagonal DBFH divisera le parallépipède en deux prismes égaux. Pl. VII.
Fig. 128.

Démonstration.

La diagonale DB divise le parallélogramme ABCD en deux triangles égaux (§. 102). Or comme les prismes ADBFGH & DBCEFH ont les bases égales, & la même hauteur DH, ils seront donc aussi égaux (§. 193). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème LXV.

196. Mesurer la solidité & la superficie d'un prisme. Fig. 129.

Solution.

1°. Cherchez la base du prisme (§. 117, 121, 122, 123, 124.)

2°. Multipliez cette base par la hauteur, le produit sera la solidité que vous cherchez.

3°. Multipliez la circonférence entière de la base par la même hauteur, le produit exprimera la superficie, après qu'on en aura retranché les bases.

4°. Si on les y ajoute, on aura la superficie entière (§. 180).

E X E M P L E.

Soit AB 8', CD 6',	AE 15'
AB 8'	ABC 24'
$\frac{1}{2}$ CD 3	AE 15
ABC 24'	120

Solidité du Prisme 360'

BC 91"

AB 80

AC 62

Circonférence 233"

AE 15.0

11650

233

Superficie sans bases 34950"

ABC — 2400

HEI 2400

Superficie entiere 39750"

Démonstration.

Le prisme triangulaire est la moitié du parallélipède qui a la même hauteur avec une double base (§. 195). Si on multiplie donc la base du parallélipède par sa hauteur, le produit sera sa solidité (§. 194). Si l'on multiplie aussi la base du prisme, qui est la moitié du parallélipède, par la hauteur, on aura la moitié du parallélipède, c'est-à-dire la solidité du prisme. Comme tous les autres prismes peuvent se réduire en triangles, il

Faut leur appliquer les démonstrations que nous avons données en parlant des triangles.

Problème LXVI.

197. Trouver la solidité & la superficie d'un cylindre par son diamètre & sa hauteur donnés.

Solution.

1°. Cherchez la base du cylindre (§. 134.)

2°. Multipliez-la par sa hauteur, le produit fera la solidité demandée.

3°. Si vous multipliez sa circonférence par la hauteur, vous aurez la superficie en retranchant les bases; & si vous les y ajoutez, vous aurez la superficie entière.

E X E M P L E.

Soit le diamètre 2 A B 560', hauteur B C 892"

Bafe	246176"	Circonf.	17584
Hauteur B C	892	BC	892
<hr/>		<hr/>	
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
<hr/>		<hr/>	
Solid. 219588992"	Superf.	156849280	
du cylindre.	Bases ôtées {	24617600	
	Bases {	24617600	
	<hr/>		
	Superficie entière 206084480		

Pl. VII.
Fig. 116.

Démonstration.

Le cercle étant un polygone régulier composé d'une infinité de côtés, on peut considérer le cylindre comme un prisme qui auroit aussi une infinité de côtés. On trouve donc sa solidité en mul-

multipliant sa base par sa hauteur, & la circonférence de la base multipliée par la même hauteur donnera la superficie (§. 196). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXIX.

198. Les pyramides & les cônes qui ont même base & même hauteur, sont égaux.

Démonstration.

Si l'on conçoit deux pyramides ou cônes coupés par une infinité de plans parallèles aux bases, & également éloignés du sommet, il n'y aura pas plus de plans dans une pyramide que dans l'autre à cause des hauteurs égales; donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les pyramides seront égales. On doit faire le même raisonnement pour les cônes, puisque les côtés droits ou inclinés font des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés.

Théorème XXX.

Pl. VII.
Fig. 122.

199. Toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui auroit même base & même hauteur.

Démonstration.

Je coupe les trois parallélogrammes montants par les diagonales AF , FC , EC , & je fais passer un plan par les deux AF , FC , & un autre par les deux FC , EC , ce qui me donne trois pyramides $ABCF$, $EFDC$, $ECAF$: or les deux premières ont les bases ABC , DEF égales, de même que leurs hauteurs BF , DC ; & si l'on con-

soit que la seconde $E F D C$ ait pour base le triangle $E C D$, & que la base de la troisième $E A C F$ soit le triangle $A C E$, on trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales, à cause que leurs bases $A E C$, $E C D$ sont égales, & qu'elles ont leurs sommets au même point F , ce qui leur donne une même hauteur; donc les trois pyramides sont égales, & par conséquent une pyramide est la troisième partie d'un prisme triangulaire.

Corollaire.

200. Puisqu'on peut donc considérer un cône comme une pyramide ayant une infinité d'angles, le cône fera la troisième partie d'un cylindre qui auroit la même base & la même hauteur.

Problème LXVII.

201. Mesurer la solidité d'une pyramide & d'un cône.

Solution.

1°. Cherchez la solidité d'un prisme ou d'un cylindre qui auroit même base & même hauteur que la pyramide & le cône. (§. 196, 197.)

2°. Divisez-la par 3 : le quotient fera la solidité de la pyramide ou du cône.

Ou bien,

Multipliez la base de part & d'autre par la troisième partie de la hauteur.

E X E M P L E.

Soit la solidité du prisme (§. 196) $360'$, la solidité de la pyramide sera $120'$.

Soit la solidité du cylindre (§. 197) 219° , $588'$, $992''$; la solidité du cône sera 731° , $963'$, $30\frac{2}{3}''$.

Problème LXVIII.

202. Trouver la solidité d'un cône tronqué ABCD.

Solution.

Pl. VIII.
fig. 130.

1°. Dites d'abord : le grand demi-diametre AG est à la hauteur du cône entier, comme la différence des demi-diametres AG & CF est à la hauteur du cône tronqué CH (§. 149) ; vous trouverez la hauteur du cône entier EG, par la regle de trois. (§. 85, Arithm.)

2°. Cherchez ensuite la solidité du cône entier AEB par la connoissance de sa hauteur & de son diametre AB. (§. 201.)

3°. Soustrayez la hauteur du cône tronqué FG de la hauteur du cône entier EG, pour laisser la hauteur de celui qu'on a ôté EF.

4°. A l'aide de cette derniere hauteur & du diametre CD, cherchez la solidité du cône ECD. (§. 201.)

5°. Retranchez enfin le petit cône ECD du grand AEB, ce qui restera sera la solidité du cône tronqué ACDB.

E X E M P L E.

Soit AB 36', CD 20', FG = CH 12' ;

AG 18', CF 10' & AH 8' ; donc

AH : CH = AG : GE

$$8 : 12 = 18 :$$

$$4) 2 : 3 = 18 \text{ (§. 96, Arithm.)}$$

$$2) 1 : 3 = 9$$

3

$$27 = GE$$

$$12 = GF$$

$$15 = FE$$

$$100 : 314 = 18 :$$

$$\begin{array}{r} 2512 \\ 314 \\ \hline \end{array}$$

56' 5" 2''' moitié de la grande circonférence
1800 AG

$$\begin{array}{r} 4521 \cdot 600 \\ 5652 \\ \hline \end{array}$$

101736" grande base
90 $\frac{1}{3}$ GE

$$\begin{array}{r} 9^{\circ} 156' 240'' \text{ c\^one AEB} \\ 100 : 314 = 10 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 314'' \text{ moitié de la petite circonférence} \\ 100 CF \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31400'' \text{ petite base} \\ 50 \frac{2}{3} EF \end{array}$$

1570000" Solidité du c\^one CED
9156240 Solidité du c\^one AEB

7586240 Solidité du c\^one tronqué ACDB.

Théorème XXXI.

203. Une sphere est égale aux deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit même base, c'est-à-dire, dont la base seroit le plus grand cercle de la sphere.

Démonstration.

Soit le quart du cercle ABC, qui en tournant autour de son rayon fixe BC décrit une demi-sphere ABL; je décris le quarré ACBM du

Pl. VII.
Fig. 131.

rayon BM ; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle isoscele MBC : je conçois que le rayon BC soit coupé en une infinité de parties égales entre elles, & que des points de division $O, T, \&c.$ soient menées des perpendiculaires OQ, TX sur ce rayon, & qui se terminent sur AM ; ces droites seront les éléments du quarré $AMBC$; leurs parties $OR, TZ, \&c.$ qui se terminent sur la circonférence du quart de cercle, seront les éléments de ce quart de cercle ; & les parties $OS, TV, \&c.$ qui se terminent sur la diagonale MC , seront les éléments du triangle rectangle isoscele MBC ; de façon que chaque élément $OS, \&c.$ de ce triangle sera égal à sa distance $OC, \&c.$ du centre C ; car les triangles semblables MBC, SOC , donnent $MB. BC :: SO. OC$; or $MB = BC$; donc $SO = OC$; & il est aisé de voir que chaque élément $OQ, TX, \&c.$ du quarré $ACMB$, sera égal au rayon BC : si l'on conçoit que le quarré $ACBM$, le quart de cercle ABC , & le triangle MBC tournent autour du rayon immobile BC ; les éléments du quarré $ACBM$ décriront les cercles tous égaux qui formeront un cylindre $AMHL$; les éléments du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-sphère ABL , & dont le plus grand sera celui qui décrira le rayon AC , lequel pour cette raison se nomme le grand cercle de la sphère, & les éléments du triangle MBC décriront des cercles qui formeront un cône MCH . Or ces cercles étant entre eux comme les quarrés, au lieu des cercles, & à cause de la propriété du cercle, nous aurons

$$\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 ; \text{ mais } BC = OQ \text{ \& } OC = OS ; \text{ donc } \overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2 ; \text{ par la même raison}$$

nous

nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainsi des autres ; c'est-à-dire que les quarrés des éléments du quart de cercle sont égaux aux quarrés des éléments du quarré $ACBM$, moins les quarrés des éléments du triangle MBC ; donc, en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les éléments du quart de cercle, ou la demi-sphere ABL , égaux aux cercles décrits par les éléments du quarré $ACBM$, ou au cylindre $AMHL$ moins les cercles décrits par les éléments du triangle MBC , ou moins le cône MCH : mais le cône MCH étant une pyramide d'une infinité de côtés, est le tiers du cylindre $AMHL$ qui est un prisme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même base que le cône ; donc la demi-sphere ABL est égale aux deux tiers du cylindre $AMHL$.

On prouve de la même façon que la demi-sphere AKL est égale aux deux tiers du cylindre $APEL$, & que par conséquent la sphere entiere est égale aux deux tiers du cylindre $MPEH$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXXII.

204. Le cube du diametre est à la sphere, à-peu-près comme 300 à 157.

Démonstration.

Si le diametre de la sphere est 100, son cube fera 1000000 (§. 191) ; & un cylindre ayant même base & même hauteur que la sphere, 785000 (§. 197) ; par conséquent la solidité de la sphere $523333\frac{1}{3}$ (§. 203) : le cube du diametre est donc à la sphere comme 1000000 à $523333\frac{1}{3}$,

c'est-à-dire, en multipliant l'un & l'autre par 3, comme 3000000 à 1570000 (§. 58 Arithm.), ou en divisant par 10000, comme 300 à 157 (§. 59 Arithm.)

Remarque.

205. Je dis que le cube du diametre est à la sphere à-peu-près comme 300 à 157. Car dans la démonstration on prend un rapport par approximation du diametre à la circonférence 100 : 314 (§. 129).

Théorème XXXIII.

206. La superficie d'une sphere est le quadruple du grand cercle de la même sphere.

Démonstration.

La sphere est égale à une pyramide qui a pour base la superficie, & pour hauteur le rayon d'une sphere. On trouvera la superficie en divisant la solidité par la sixieme partie du diametre. Le produit des $\frac{2}{3}$ du grand cercle multipliés par le diametre donne la solidité de la sphere ; si l'on divise donc ce produit par la sixieme partie du diametre, ou, ce qui est la même chose, qu'on le divise d'abord par le diametre pour avoir le quotient $\frac{2}{3}$ du plus grand cercle, & ensuite par un $\frac{1}{6}$, on aura le quotient $\frac{12}{5}$ du plus grand cercle, c'est-à-dire le quadruple du plus grand cercle. Or, la superficie de la sphere est la même chose ; donc la superficie d'une sphere est le quadruple du grand cercle de la sphere.

Corollaire.

207. On aura donc la superficie d'une sphere,

si on multiplie la circonférence par le diamètre (§. 134).

Problème LIX.

208. Trouver la superficie & la solidité d'une sphere par le diamètre connu.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence du plus grand cercle (§. 132).

2°. Multipliez-la par le diamètre donné; le produit est la superficie de la sphere (§. 207).

3°. Si vous multipliez cette superficie par la sixieme partie du diamètre, ou par le diamètre entier, & que vous divisiez le produit par 6, vous aurez la solidité de la sphere.

E X E M P L E.

Soit le diamètre 5600^{'''} & la circonférence du grand cercle 17584^{'''}.

$$\begin{array}{r} \text{Circonférence} \quad 17584''' \\ \text{Diametre} \quad 5600 \\ \hline 10550400 \\ 87920 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Superficie de la sphere} \quad 984704''' \\ \text{Diametre} \quad 560 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59082240 \\ 4923520 \\ \hline 551434240''' \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 28 \\ 881434240 \\ 66666666 \end{array} \right\} 91905706'' \frac{2}{3} \text{ Solidité de la sphere.}$$

R ij

Problème LXX.

209. Le diamètre d'une sphere étant donné, trouver sa solidité par une méthode différente de celle qui est ci-dessus.

Solution.

1°. Cherchez le cube du diamètre (§. 191), ou tirez-le de la table des cubes.

2°. Trouvez un nombre proportionnel à 300, 157, & au cube trouvé (§. 85 Arithm.), ce nombre donnera la solidité (§. 204).

E X E M P L E.

Soit le diamètre de la sphere 64", & le cube 262144", conséquemment

$$300 \text{ — } 157 \text{ — } 262144''$$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \hline 1835008 \\ 1310720 \\ 262144 \\ \hline 41156608 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 22 \quad 222 \\ 41186608 \\ 33333300 \end{array} \right\} 137188'' \frac{208}{300} \text{ Solidité de la sphere.}$$

Théorème XXXIV.

210. Tous prismes, parallélipèdes, cylindres, pyramides & cônes qui ont mêmes hauteurs, sont entre eux comme leurs bases; & si leurs bases sont égales, ils sont entre eux comme leurs hauteurs.

Démonstration.

Les prismes, parallélipipedes, & cylindres sont comme les produits des bases par leurs hauteurs (§. 194, 196, 197) ; les pyramides & les cônes sont comme les produits de la troisième partie de leurs hauteurs multipliée par les bases (§. 201) ; si leurs hauteurs sont égales, ils seront donc entre eux comme les bases sont elles ; & si leurs bases sont égales, ils seront comme leurs hauteurs. (§. 58 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

211. Les bases des cylindres sont des cercles (§. 179) : les cercles sont comme les carrés de leurs diamètres (§. 131) ; les cylindres qui ont même hauteur sont donc comme les carrés de leurs diamètres, ou des circonférences des bases.

Théorème XXXV.

212. Les sphères sont comme les cubes de leurs diamètres.

Démonstration.

Une sphère étant au cube de son diamètre comme une autre sphère est au cube de son propre diamètre (§. 204), une sphère fera donc à l'égard de l'autre comme le cube du diamètre de l'une est au cube du diamètre de l'autre (§. 83 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

L E L A J A U G E.

Problème LXXI.

213. Construire la verge de fer qu'on nomme
R iij

communément *jauge*, par le moyen de laquelle on puisse trouver le nombre des mesures d'un fluide contenues dans un vaisseau cylindrique.

Solution.

Pl. VIII. 1°. Joignez à angle droit une ligne indéfinie
Fig. 132. au diamètre A B d'un vaisseau cylindrique.

2°. Portez de A à 1 la droite égale à A B ; B 1 sera le diamètre d'un vase qui contient deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier vase.

3°. Faites $A 2 = B 1$, B 2 sera le diamètre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le vase qui n'en contient qu'une. On trouve de cette manière les diamètres de plusieurs autres vases plus grands A 3, A 4, A 5, A 6, &c.

4°. Portez sur un côté de la jauge les divisions trouvées, A 1, A 2, A 3, &c. & sur l'autre côté, autant de fois que vous le pourrez, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure, & vous aurez une jauge parfaite.

Démonstration.

Deux cylindres de même hauteur, & dont cette hauteur est celle d'une mesure, sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres (§. 211); d'où il est évident que le quarré du diamètre d'un vase qui contient deux, trois, quatre, &c. mesures, est le double, triple, quadruple, &c. du quarré du diamètre d'un vase qui n'en contient qu'une. Or le quarré de B 1 ou A 2 est le double, le quarré de B 2 ou A 3 est le triple, le quarré de B 3 ou A 4 est le quadruple, &c.

du quarré de AB ou A_1 (§. 144) : & comme AB ou A_1 est le diametre d'un vase qui tient une mesure , A_2 sera le diametre d'un vase qui en contient deux , A_3 celui d'un vase qui en contient trois , A_4 celui , &c. Si vous appliquez donc au diametre d'un vase cylindrique le côté de la jauge où sont marquées ces divisions , vous verrez tout d'un coup combien ce fond peut tenir de mesures. C'est pourquoi si on multiplie le diametre par la hauteur , le produit sera le nombre des mesures que tout le vase peut contenir. Ainsi par le moyen de la jauge on trouve la capacité d'un vase cylindrique , relativement aux mesures dont nous nous servons pour mesurer les fluides , comme le vin , la biere , l'eau-de-vie , &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

214. Que le diametre soit , par exemple , 8 & sa hauteur 12 ; le nombre de mesures que le vaisseau pourra contenir , sera 96.

Problème LXXII.

215. Trouver la capacité d'un tonneau , c'est-à-dire , le nombre des mesures d'un fluide qu'il contient.

Solution.

1°. Mesurez , avec le côté convenable de la jauge , la longueur du tonneau FE , & avec l'autre côté de la jauge , mesurez le diametre du fond AB , & le diametre du ventre du tonneau par son orifice C .

2°. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu , & que de son orifice C il va toujours

R iv

Pl. VIII.
Fig. 133

en diminuant vers ses deux extrémités , l'expérience qu'on a acquise par l'usage (quoiqu'on ne puisse le démontrer géométriquement) , le fait considérer comme un cylindre dont la base est un cercle moyen , arithmétiquement proportionnel entre le cercle qui forme le fond & celui qui forme le ventre : il faut donc ajouter le grand diamètre CD au petit AB .

3°. Multipliez la moitié de la somme par la longueur du tonneau , le produit (comme on le voit par la démonstration du problème précédent) (§. 213) fera le nombre des mesures que peut contenir le tonneau.

E X E M P L E.

$$\text{Soit } AB == 8$$

$$CD == 12$$

$$\text{La somme fera } == 20$$

$$\text{Demi-somme } == 10$$

$$FE == 15$$

$$\text{Capacité du tonneau } == 150 \text{ mesures.}$$

Remarque.

216. Il faut remarquer qu'on est encore à trouver une méthode juste , infaillible , & facile pour mesurer les fluides dans un tonneau qui n'est pas plein. Mais si on le leve sur un de ses fonds , & qu'on prenne la hauteur du vin pour la longueur du tonneau , on pourra , à l'aide du problème précédent , trouver le nombre des mesures qu'il pourra contenir.

Problème LXXXIII.

217. Trouver la solidité de quelque corps irrégulier que ce puisse être.

Solution.

1°. Mettez le corps irrégulier dans un parallélipipedecreux, remplissez ensuite d'eau ou de sable ce parallélipipe, & après avoir rendu la surface du sable exactement plane, marquez la hauteur AB de cette surface si vous n'avez pas rempli le vaisseau entièrement. Pl. VIII.
Fig. 134

2°. Ayant retiré le corps irrégulier du vaisseau, aplissez de nouveau la surface du sable qui doit rester dans le parallélipipe, & marquez encore la hauteur de cette surface AC : de cette manière vous aurez la hauteur BC .

3°. Comme le corps irrégulier est égal au parallélipipe $DFCGE$, il faut mesurer sa longueur FC , sa largeur CG , & chercher sa solidité (§. 194).

E X E M P L E.

Soit AB 8', AC 5', on aura BC 3'; soit donc encore FC 12', CG 4', la solidité du corps sera 144'.

Remarque.

218. Si on ne pouvoit commodément mettre dans ce vase le corps irrégulier qu'on veut mesurer, comme seroit une statue immobile; on pourra l'entourer d'un parallélipipe ou d'un prisme quadrangulaire, & remplir le vuide avec du sable; puis la base étant connue, on opérera comme ci-dessus.

Problème LXXIV.

219. Dessiner les *développements*, *rets*, ou *châssis*, qui, pliés comme ils doivent être, représenteront les figures des différents corps géométriques.

Solution.

Pl VIII.
Fig. 135.

1°. Faites le triangle équilatéral ABC (§. 53) : divisez chaque côté en deux également aux points EDF , & menez les droites DE , EF , FD , & vous aurez la figure ou développement d'un *tétraèdre*.

Fig. 136.

2°. Si vous prolongez les côtés AC en G , BC en H , & ED en L , de manière que CG soit égal à DC , $CH = FC$, $DI = IL = ED$; vous pourrez alors mener les droites GL , CI , & IH ; & par ce moyen vous aurez le développement de l'*octaèdre*. (§. 190.)

Fig. 137.

3°. Portez 4 fois sur la ligne AB le côté du cube AI , de façon que $AI = IL = LN = NB$, & formez ensuite le rectangle $ABDC$, en sorte que AC soit égal à AI (§. 99). Menez les droites IR , LM , NO , parallèles à AC , & prolongez de part & d'autre IR & LM en E & F , G & H , tant que $EI = IR = RF$, & $GL = LM = MH$; vous ferez par cette méthode le développement de l'*exaèdre*. (§. 182.)

Fig. 138.

4°. Décrivez le pentagone régulier $ABCDE$ (§. 107), appliquez une règle sur les points D & B , & menez la droite BL . Ayant appliqué la même règle sur DA , menez la droite AG : & faites $AG = AB = BL$, & de l'intervalle AB faites une intersection en Q des points G , L , vous formerez ainsi le pentagone $ABLQG$. Si vous

construisez par la même méthode les quatre autres pentagones BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, & les autres six a, b, c, d, e, f , vous aurez décrit le rets, chassis, figure ou développement du *dodécaedre*. (§. 190.)

5°. Décrivez le triangle équilatéral ACB (§. 53); prolongez la droite AB en D, & portez la longueur de cette ligne AB quatre fois sur AD en commençant au point B; menez ensuite la droite CE parallèle à AD (§. 67), & faites $CI = IK = KL = LM = ME = AB$; prolongez AC en N jusques à ce que $CN = AC$; appliquez la règle sur B & I, F & K, G & L, H & M, D & E, & tirez les droites YO, SP, TQ, VR, & XE; puis ayant appliqué cette même règle sur D & M, H & L, G & K, F & I, B & C, menez les droites DQ, XP, VO, TN, SC; faites enfin $MR = ME$, & $BY = BA$, & tirez les droites RE & AY: ce qui donnera la figure du chassis de l'*isocaedre*. (§. 190.)

Pl. VIII.
Fig. 139

6°. Transportez de B en H sur la ligne BD la largeur du *parallélipède* AB, & sa longueur de H en I, puis encore sa largeur de I en K, & sa longueur de K en D; élevez avec l'équerre au point B la hauteur du parallélipède AB, & achevez le rectangle BACD (§. 99); menez les parallèles EH, FI, GK à AB (§. 67), & prolongez E de part & d'autre en L & N, puis FI en M & O, jusqu'à ce que LE, MF, IO & NH soient parallèles à la hauteur du parallélipède. C'est de cette façon qu'on forme le développement du parallélipède. (§. 182.)

Fig. 140

7°. Portez sur la droite CF les côtés de la base du *prisme* CG, GH, & HF; décrivez le rectangle CAEF dont la hauteur CA est égale à la hau-

Fig. 141

teur du prisme (§ 99). Construisez sur les côtés BD & GH , AB & DE , CG & HF les triangles BKD & GIH (§. 55) : & tout le développement du prisme sera fait (§. 179). Si la base étoit un pentagone, exagone, eptagone, &c. on décriroit sur BD & GH un pentagone, exagone, eptagone, &c.

Pl. VIII.
Fig. 142.

8°. Du point A de la *pyramide* AE décrivez l'arc EB , & appliquez-lui les côtés de la base ED , DC , CB ; menez les droites AE , AD , AC , AB . Décrivez enfin sur DC la base de la pyramide, & vous aurez le rets de la pyramide. (§. 187.)

Fig. 143.

9°. Pour avoir le rets d'un *cylindre*, décrivez un rectangle (§. 99) dont la hauteur BC soit égale à celle du cylindre, & la longueur $CF =$ à sa circonférence. (§. 132.)

Prolongez BC en A & D , jusqu'à ce que BA & CD soient égales au diamètre, & décrivez les cercles qui font les bases du cylindre.

Remarque.

220. Pour coller ensemble toutes ces parties des développements, avec lesquels vous voulez former vos corps géométriques, ayez soin d'y laisser des bords ou marges en les coupant, à peu près comme vous le voyez par les lignes ponctuées de la figure 135; rien de meilleur que ce travail, & rien de plus utile pour faciliter la connoissance & faire concevoir distinctement les corps géométriques aux commençants.

Fin de la Géométrie.



É L É M E N T S

DE LA

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE.

D É F I N I T I O N I.

1. **L**A *Trigonométrie* est la science de trouver tous les côtés & les angles d'un triangle rectiligne par la connoissance de trois de ses parties, dont au moins une est un des côtés du même triangle. Des deux côtés, par exemple, AB & AC , & de l'un des angles C , trouver les deux autres angles A & B , aussi-bien que le côté BC .

Pl. I.
Fig. 1.

D É F I N I T I O N. II.

2. La moitié de la corde AD de l'arc AB se nomme le *Sinus* de l'arc AE , & de l'arc AI , qui font la moitié des arcs AEB & AIB .

Fig. 2.

Corollaire I.

3. Donc le sinus AD de quelque arc que ce puisse être est perpendiculaire sur le rayon du cercle EC (§. 95, Géom.) : & les sinus de plusieurs

Fig. 2.

arcs sont par conséquent parallèles entre eux.
(§. 75 , Géom.)

Corollaire I I.

Fig. 2. 4. L'arc A E étant la mesure de l'angle A C E ; & l'arc A I celle de l'angle A C I (§. 16 , Géom.), il est évident que ces deux angles ont pour sinus A D.

Corollaire I I I.

Fig. 2. 5. Deux angles que l'on nomme *de suite*, c'est-à-dire posés l'un auprès de l'autre sur la même droite E I , ont donc le même sinus.

D É F I N I T I O N I I I.

Fig. 2. 6. On nomme *Tangente* de l'arc A E , & par conséquent de l'angle A C E , la droite E F , élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon E C ; & on donne le nom de *Secante* du même arc E A & du même angle E C A , à la droite F C.

D É F I N I T I O N I V.

Fig. 2. 7. Le *Sinus verse* d'un arc ou d'un angle est la partie du diamètre comprise entre l'extrémité de l'arc & son sinus droit. Ainsi le sinus verse de l'arc A E , ou de son angle A C E , est la partie E D du diamètre E I ; & A G = D C sinus de l'arc A H , qui pris avec l'arc E A forme 90 degrés , se nomme *Sinus du complément*, ou *cofinus*. Sa tangente H L se nomme *Tangente du complément*, ou *cotangente* ; la sécante enfin C L se nomme *Sécante du complément* ou *cosécante* du même arc E A , ou de l'angle A C E. Quand on dit *Sinus droit* ou simplement *Sinus*, on entend la même chose.

Remarque.

L'angle de suite ACI , de l'angle ACE , se nomme complément à deux droits de l'angle ACE ; & l'angle ACH qui manque à l'angle ACE pour valoir un droit, se nomme complément à l'angle ACE . Il faut donc bien prendre garde de ne pas confondre ces deux sortes de compléments.

Fig. 2.

D É F I N I T I O N V.

8. Le rayon EC ou HC se nomme *Sinus total*.

Fig. 2.

Corollaire I.

9. Puisque le rayon HC est le sinus du quart de cercle EH , le sinus total est par conséquent le sinus de l'angle droit. (§. 37 Géom.)

Corollaire II.

Il est évident que tout sinus droit, toute tangente & toute sécante appartiennent à deux arcs, lesquels pris ensemble font toujours 180 degrés, ou un demi-cercle. Cela se voit clairement à l'égard du sinus AD qui appartient aussi bien à l'arc AHI , qu'à l'arc $AË$. Il en est de même de la tangente FE , & de la sécante FC qui appartient aussi à l'arc AHI ; car si on prolonge la sécante FC , jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente qu'on placera à l'extrémité I du diamètre El ; cette tangente & cette sécante formeront des angles dans l'arc EBI égaux à ceux qu'ils forment dans l'angle EAI .

Fig. 2.

Théorème I.

10. Les sinus de deux arcs semblables BC & EF ont le même rapport, & sont en même raison avec leurs rayons AB & ED .

Fig. 3 & 4.

Démonstration.

Si les arcs BG & EH sont semblables , ils ont l'un & l'autre le même nombre de degrés , & par conséquent les angles A & D sont égaux (§. 35 , Géom.). Or les angles C & F sont droits (§. 3), le rayon AB est donc au sinus BC comme le rayon ED au sinus EF (§. 148 , Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

11. C'est pourquoi on attribue 10000000 parties au sinus total de quelque cercle que ce soit , & on suppose par le moyen de la Géométrie , combien de ces parties se trouvent au sinus & à la tangente de chaque degré , & même de chaque minute du quart de cercle entier. C'est de cette façon qu'on a construit les *tables des sinus & des tangentes* dont on a besoin dans la Trigonométrie , & que l'on trouve à la tête de presque tous les traités qui ont été composés sur cette matière.

Remarque II.

12. Les sinus & les tangentes sont des nombres d'une étendue qui ennuie infiniment quand il s'agit d'en faire la multiplication ou la division dans la Trigonométrie ; c'est pourquoi *Jean Neper*, Baron en Ecosse , & après lui *Henri Briggs*, Anglois , ont imaginé certains nombres , dont l'usage abrége extraordinairement les grands calculs qu'il faudroit faire , si l'on se servoit des nombres ordinaires ; ils convertissent la multiplication en addition , & la division en soustraction. On leur a donné le nom de

D E T R I G O N O M É T R I E. 273

de *Logarithmes*. On les trouve dans les tables des sinus & des tangentes , non seulement pour le calcul des sinus & des tangentes , mais encore pour celui des nombres naturels depuis un jusqu'à 1000 , & quelquefois davantage. Les logarithmes étant donc d'une si grande commodité , il est à propos d'en donner quelque connoissance précise , avant que d'en venir aux Problèmes.

D É F I N I T I O N V I.

13. Si l'on a deux suites de nombres , l'une en proportion géométrique , l'autre en proportion arithmétique , on nomme les derniers les logarithmes des premiers.

Remarque I.

14. Soient les deux suites de nombres

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les premiers se suivent en proportion géométrique , & les seconds en proportion arithmétique : 0 est le logarithme de l'unité ; 1 le logarithme de 2 ; 2 celui de 4 ; 7 celui de 128 ; 8 celui de 256 , &c.

Remarque II.

15. Si le logarithme de l'unité est 0 , le logarithme du produit sera égal à la somme des produits des logarithmes.

E X E M P L E.

La somme des logarithmes 1 & 2 est 3 , qui est

le logarithme de 8 , produit de 2 multiplié par 4 : 7 qui est la somme des logarithmes 2 & 5 , aussi bien que des logarithmes 4 & 3 , est le logarithme de 128 , produit de 4 multiplié par 32 , & de 8 multiplié par 16 : c'est pourquoi le logarithme du quarré est égal au double du logarithme de la racine.

E X E M P L E.

4 , logarithme du nombre quarré 16 est double du logarithme 2 , racine de 4 ; & 6 , logarithme du nombre quarré 64 , est double du logarithme 3 , racine de 8. La moitié du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine quarrée du même nombre. Ainsi la moitié du logarithme 8 est le logarithme de la racine 16 du nombre quarré 256. Le logarithme du cube est le triple du logarithme de la racine : 9 , logarithme du nombre cubique 512 , est le triple du logarithme 3 , racine de 8 ; & par conséquent le logarithme de la racine cubique est la troisieme partie du logarithme du nombre cubique. 2 , par exemple , logarithme de 4 , est la troisieme partie de 6 logarithme du nombre cubique 64.

Remarque III.

16. Si le logarithme de l'unité est 0 , le logarithme du quotient sera égal à la différence des logarithmes du diviseur & du dividende. On trouve le logarithme d'une fraction , si après avoir soustrait le logarithme du numérateur du logarithme du dénominateur , on place devant le reste le signe — qui marque la soustraction. Ainsi 2 , différence entre 5 & 7 , est le logarithme du quo-

DE TRIGONOMÉTRIE. 275

tient 4 de 128 divisé par 32. De même 5, différence de 3 & 8, est le logarithme du quotient 32 de 256 divisé par 8. Mais $1 - 1$, différence entre 0 & 1, est le logarithme de la fraction $\frac{1}{2}$.

Remarque IV.

17. On voit par ce que je viens de dire, comment à l'aide des logarithmes on convertit la multiplication en addition, la division en soustraction, l'extraction de la racine quarrée en bipartition, & l'extraction de la racine cubique en tripartition.

Remarque V.

18. Les Constructeurs des tables ont pris, 0.00 000 000, 1 00 000 000, 2.00 000 000, 3.00 000 000, 4.00 000 000, pour logarithmes des nombres 1. 10. 100. 1000. 10000, & avec une peine & un travail des plus laborieux ont poussé les logarithmes, non seulement depuis 1 jusqu'à 10000, mais jusqu'à 100000. C'est par là qu'ils ont déterminé les logarithmes des sinus & des tangentes. On trouve ces tables des logarithmes dans M. Ozanam, &c. Les problèmes suivants indiqueront la maniere de se servir des logarithmes.

Remarque VI.

Pour donner une plus grande connoissance des logarithmes, il faudroit en parler fort au long; mais comme un abrégé demande qu'on ne dise précisément que ce qui est absolument nécessaire pour l'intelligence de la matiere que l'on traite, je me bornerai à la remarque suivante, parceque

ceux qui voudront se mettre parfaitement au fait, pourront consulter M. Ozanam, les *Eléments* de Wolf, ceux de l'Abbé Deidier, &c. qui en ont traité d'une manière fort claire.

Remarque VII.

Une suite de puissance littérale est la même que la progression géométrique ; car $a^0 = 1$, $a^1 =$
 $\text{---}1\text{---}2\text{---}3$,
 2, &c. & les puissances négatives a , a , a , &c.

sont les mêmes que celles-ci $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, & les exposants des puissances littérales seront les mêmes que les termes de la progression arithmétique que nous avons mis sous ceux de la progression géométrique : les logarithmes ont donc les mêmes propriétés que les exposants des puissances de a ; ainsi si je veux multiplier le terme 2 de la progression géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter ensemble les logarithmes 1 & 3 de ces deux termes, & la somme 4 sera le logarithme du produit cherché. Or le terme de la progression géométrique écrit au-dessus de 4 est 16 ; donc 16 est le produit de 2 par 8. Si je veux diviser 16 par 2, je prends les logarithmes 4 & 1 de ces termes 16 & 2, & retranchant le second du premier, le reste 3 est le logarithme du quotient cherché ; ainsi 8 écrit sur 3 est le quotient de 16 divisé par 2.

Pour élever le terme 2 de la progression géométrique à sa quatrième puissance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'exposant 4 de la quatrième puissance de 2 : ainsi le terme 16 écrit au dessus de 4 est la quatrième puissance cherchée.

Pour extraire la racine cubique de 8, je prends

son logarithme 3, & le divisant par l'exposant 3 de la racine cubique, le quotient 1 est le logarithme de la racine cubique de 8, & par conséquent le terme écrit au-dessus de 1 est la racine cherchée. Ainsi ce qu'il faudroit faire par la multiplication & la division, en opérant sur les termes de la progression géométrique, on le fait par l'addition & la soustraction; & ce qu'il faudroit faire par l'élevation des puissances ou l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la division.

Comme il se trouve entre les termes d'une progression géométrique beaucoup de nombres qui ne sont point en progression, & qui par conséquent n'ont point de logarithmes, on y a pourvu par les logarithmes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. en cette sorte. On a pris la progression géométrique décimale, 10, 100, 1000, 10000, &c. Mais comme il a fallu extraire des racines pour trouver les logarithmes des nombres 1 & 10, pour éviter les restes, on a augmenté tous les termes de leur progression, & leurs logarithmes de plusieurs zéros, en mettant un point devant pour distinguer les logarithmes d'avec les zéros ajoutés, comme 1. 0000000, ou 10. 0000000, &c. & leurs logarithmes 0. 0000000, 1. 0000000, &c. On a nommé *Caractéristique* le caractère qui se trouve devant ce point.

Théorème II.

19. Dans tout triangle ABC les côtés sont comme les sinus des angles opposés.

Fig. 5.

Démonstration.

Si on conçoit un triangle inscrit dans un cercle (ce qui se peut toujours faire) (§. 97 Géom.), la moitié de l'arc AB sera la mesure de l'angle C.

Sij

(§. 84 Géométrie), & ainsi la moitié du côté AB fera son sinus (§. 2). Semblablement la moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle B , & par conséquent la moitié du côté AC fera le sinus de l'angle B ; donc le côté AC est au sinus de l'angle opposé B , comme le côté AB est au sinus de l'angle C qui lui est opposé. (§. 59 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème I.

Fig. 5. 20. Les deux angles A & C , & le côté AB étant connus, trouver le côté BC .

Solution.

Dites (§. 19) : le sinus de l'angle A est au côté qui lui est opposé BC , comme le sinus de l'angle C au côté AB qui lui est opposé.

Soit, pour exemple, $C = 48^{\circ} 35'$, $A = 57^{\circ} 28'$, $AB = 74'$: on opere ainsi par les logarithmes.

Log. Sin. C ..	9.	8750142
Log. AB	1.	8692317
Log. Sin. A ...	9.	9258681

Somme de AB & A 11. 7950998

Log. BC 1. 9200856 auquel répond directement dans les tables 83'.

Remarque I.

21. Si, non content d'avoir le nombre des pieds, vous voulez encore des pouces, cherchez le même logarithme de BC sous le caractèreistique 2 après 830; vous trouverez que le logarithme 832 est celui qui en approche le plus; & ainsi vous verrez qu'outre 83 pieds, il y a encore deux pou-

ces. Voulez-vous avoir même des lignes? cherchez encore le même logarithme sous le caractèreistique 3 après 8320, & vous trouverez que le logarithme qui en approche de plus près est 8320, & par conséquent que le côté BC sera de $8^{\circ} 3' 2'' 1'''$. Il faut toujours suivre cette méthode, quand le logarithme ne se trouve pas assez exactement sous le caractèreistique.

Remarque II.

22. Comme on résout le problème par la règle de Trois (§. 85 Arith.), il faudroit multiplier le sinus A par le côté AB, & diviser le produit par le sinus de l'angle C: il est évident qu'il faut ajouter le logarithme du côté AB au logarithme du sinus A; & qu'il faut ensuite soustraire de la somme le logarithme du sinus C (§. 15 & 16).

Problème II.

23. Les deux côtés AB & BC avec l'angle C Fig. 5.
opposé à un des deux AB, étant connus, trouver les autres angles.

Solution.

Dites (§. 19): le côté BC est au sinus de l'angle cherché A qui lui est opposé, comme le côté AB est au sinus de l'angle donné C qui lui est opposé.

E X E M P L E.

Soit $AB = 82'$, $BC = 75'$, $C = 64^{\circ} 33'$:
vous ferez le calcul de la façon suivante.

Logar. AB 1. 9138138

Logar. du Sin. C . . . 9. 9556688

Logar. de BC 1. 8750613

Somme de BC & de C 11. 8307301

Logar. du Sin. A . . . 9. 9169163 , auquel
répond de plus près $55^{\circ} 40'$.

Remarque I.

24. Si vous n'avez pas assez de $55^{\circ} 40'$, vous
pourrez faire une seconde opération comme il
s'ensuit.

Soustrayez du logarithme trouvé 9. 9169. 163.
le moindre qui en approche le
plus près

9. 9168. 593

Et marquez la première différence 570

Soustrayez aussi du plus prochain &c

plus grand que le logarithme trouvé 9. 9169. 455

le moindre 9. 9168. 593

Et marquez la différence 862

Dites : 862 donnent $60''$, combien donneront 570

60

24200

Remarque II.

25. Les deux angles A & C étant connus , on trouve le troisieme par le moyen de la géométrie (§. 77, Géom.) , comme on le voit par l'exemple suivant.

	C	=	64°	33'	0''
	A	=	55	40	39
	<hr/>				
A + C	120	13	39		
A + C + B	179	59	60		
	<hr/>				
B	59	46	21		

Problème III.

26. Connoissant dans un triangle rectangle les côtés AB & BC qui forment l'angle droit B , trouver les autres angles.

Fig. 6.

Solution.

Ayant pris BC pour le sinus total , AB fera la tangente de l'angle C (§. 6). Dites donc : le sinus total est à la tangente de l'angle C , comme un des côtés BC est à l'autre AC.

E X E M P L E.

Soit BC de 79' ; AB de 54' ; le calcul fera tel :

Logar. de BC. . . . 1. 8976. 271

Logar. de AB. . . . 1. 7323. 938

Logar. du sinus total. 10. 0000. 000

Logar. de la tang. C. 9. 8347. 667 , qui dans les tables appartient à 34° 21'. L'angle C est donc de 34° 21' ; & l'angle A 55° 39'. (§. 75 , Géom.)

L E M M E.

27. Si l'on ajoute la moitié de l différence de

deux nombres ou quantités à la moitié de leur somme , on aura le plus grand nombre des deux ; si au contraire on retranche cette demi-différence de la moitié de la somme , le nombre qui reste est précisément le plus petit des deux.

Démonstration.

Le plus grand de deux nombres est composé du plus petit & de leur différence ; la somme des deux est donc composée du plus petit pris deux fois , & de leur différence. C'est pourquoi la demi-somme étant composée du plus petit nombre & de la moitié de la différence ; si on ajoute la demi-différence à la moitié de la somme , on aura le plus grand des deux nombres ; & au contraire si on ôte cette demi-différence , le reste exprimera le plus petit des deux nombres proposés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème IV.

Fig. 7. 28. Connoissant les deux côtés AC & CB d'un triangle, avec l'angle C qui les forme , trouver les autres angles.

Solution.

1°. Dites : la tangente de la demi-somme des angles cherchés A & B est à la tangente de la moitié de leur différence , comme la somme des côtés AC & CB est à leur différence entière.

2°. Ajoutez la demi-différence à la moitié de leur somme , la nouvelle somme qui en viendra fera l'angle B opposé au plus grand AC des deux côtés connus. Retranchez cette demi-différence de la moitié de la somme des deux angles , le reste donnera l'angle A. (§. 27.)

DE TRIGONOMETRIE. 233

Soit pour exemple $AC\ 75'$, $BC\ 58'$, $C\ 108^\circ 24'$; faites ainsi le calcul.

AC	75°	AC	$75'$	$A+B+C$	$179^\circ 60'$
BC	58	BC	58	C	$108\ 24$
<hr/>		<hr/>		<hr/>	
$AC+BC$	$133'$	$AC-BC$	$17'$	$A+B$	$71^\circ 36'$
				$\frac{1}{2}(+AB)$	$35^\circ 48'$
					2.1238516
					1.2304489
					9.8580694
				<hr/>	
				Somme	11.0885183
				$\frac{1}{2}(A-B)$	8.9646667
				auquel répondent dans les tables	$5^\circ 17'$
$\frac{1}{2}(A+B)$		$35^\circ 48.$	$\frac{1}{2}(A+B)$	$35^\circ 48'$	
$\frac{1}{2}(A-B)$		$5\ 17$	$\frac{1}{2}(A-B)$	$5\ 17$	
<hr/>		<hr/>	<hr/>		
B		$41^\circ 5'$	A		$30^\circ 31'$

Démonstration.

Prolongez le côté AC en D jusqu'à ce que $CD = BC$, & que $CE = BC$; DA fera la somme, EA la différence des côtés CB & CA , & l'angle DBE fera droit (§. 86, Géom.)

Menez AG parallèle à EB , l'angle G sera aussi droit, & $GAD = BED$ (§. 37, 72, Géom.); & GB tangente de l'angle GAB , & GD tangente de l'angle GAD (§. 6). Or, $DCB = CBA + CAB = CBE + CEB = 2CEB$ (§. 74, 79, Géom.); CBE & CAG seront donc la moitié de la somme des angles cherchés CBA & CAB ; par conséquent BAG fera la moitié de la différence (§. 27). Donc DG , tangente de la demi-somme des angles cherchés, est à BG , tangente de la demi-différence, comme DA , somme des

côtés AC & CB, est à EA, qui est leur différence (§. 149, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème V.

29. Connoissant les trois côtés d'un triangle, trouver les angles.

Solution.

fig. 2.

1°. Du sommet de l'angle A décrivez un cercle par le plus petit côté AB; & parceque $AD = AB$, vous aurez aussi $AF = AB = AD$ (§. 27, Géom.): CD sera la somme des côtés AC & AB, & CF leur différence.

2°. Dites: la différence FC des côtés AB & AC est au segment de la base GC, comme la base BC du triangle est à la somme de ses côtés AB + AC.

3°. Soustrayez CG de la base BC pour avoir le reste BG.

4°. Abaissez de A la perpendiculaire AE sur la corde BG; vous aurez $BE = EG = \frac{1}{2} BG$ (§. 95, Géom.): ayant donc les côtés AB & BE du triangle rectangle AEB, on peut trouver les angles A & B; & dans l'autre ACE, ayant les côtés AC & CE, on trouve aussi les angles C & A. (§. 23.)



DE TRIGONOMÉTRIE. 285

Log. de B C 1. 6020600
 Log. de A B + A C . . 1. 9084850
 Log. de F C 0. 9542425

Somme . . . 2. 8627275

Log. de G C 1. 2606675, auquel répondent dans les tables 18'. Si vous le voulez plus exact (§. 21) & que vous augmentiez vos recherches, vous trouverez enfin G C de 1822''.

BC = 4000''' EG = 1089'''

GC = 1822 GC = 1822

BG = 2178''' EC = 2911'''

BE = 1089'''

Log. de A B 3. 5563025

Log. du sin. total . 10. 0000000 }
 Log. de E B 3. 0370279 }

Log. du sin. A 9. 4807254, auquel répond dans les tables le logarithme 17° 36', & par conséquent l'angle B de 72° 24'.

Log. de A C 3. 6532125

Log. du sin. total . 10. 0000000

Log. de E C 3. 4640422

Log. du sinus A . . . 9. 8108297, auquel répond dans les tables le logarithme 40° 19'; & l'angle C sera donc de 49° 41'. Par conséquent dans le triangle A B C l'angle A est de 57° 55', B de 72° 24', & l'angle C de 49° 41'.

Démonstration.

J'ai à démontrer que CB est à CD, comme CF est à C G : on va le voir clairement.

Puisque la mesure de l'angle y ou G B D est la

moitié de l'arc $G D$, & la mesure de l'angle x la moitié de l'angle $G B D$ (§. 84, Géom.); on aura $x + y = 180^\circ$. Mais $x + o$ est aussi $= 180^\circ$ (§. 38, Géom.). Donc $o = y$ (§. 25, Arithm.). Et comme l'angle C est commun aux deux angles $C G F$ & $C B D$, on aura $C B : C D = C F : C G$ (§. 148, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

30. Comme on a donné $B E$ & $E C$ en lignes, il a fallu aussi prendre dans le calcul 3600''' pour $A B$ au lieu de 36, & 4500''' pour $A C$ au lieu de 45.

Remarque II.

31. Nous donnerons encore quelques éclaircissements sur l'usage de la Trigonométrie pour la résolution de divers problèmes de la Géométrie. C'est pourquoi nous ajoutons l'Appendice suivant.

A P P E N D I C E.

Problème I.

32. **T** R O U V E R la hauteur, par exemple, d'une tour accessible du côté qu'on aura choisi pour station.

Solution.

1°. Mesurez l'angle $A D C$ (§. 43, Géom.) & la droite $B E$ ou $D C$. (§. 44, Géom.)

2°. On connoîtra la valeur de l'angle A , parce que l'angle C est droit. (§. 75, Géom.)

3°. Ayant connu cet angle A, on trouvera la ligne AC (§. 20.)

4°. Ajoutez à cette ligne la hauteur $DE = BC$; & comme les droites CD & BE sont parallèles, & CB & ED perpendiculaires à BE, on aura la hauteur AB. Mais si BE n'étoit pas horizontal, il faudroit mesurer BC en particulier (§. 171, Géom.)

Problème II.

33. Mesurer la hauteur inaccessible AB.

• Fig. 10.

Solution.

1°. Choisissez les deux stations E & G, d'autant plus éloignées l'une de l'autre, que la montagne, tour, ou arbre qu'on veut mesurer ont plus d'élévation : de là mesurez les angles ADC & AFC (§. 43, Géom.), ensuite la longueur des distances GE ou DF (§. 44, Géom.)

2°. Retranchez de l'angle AFC l'angle ADF; le reste sera l'angle FAD (§. 74, Géom.)

3°. Cherchez le côté AF, par le moyen de la connoissance acquise des parties du triangle AFD, des angles, & du côté FD.

4°. Cherchez ensuite le côté AC par l'angle F, & le côté AF connus du triangle rectangle. (§. 20.)

5°. Ajoutez enfin la hauteur de l'instrument DE à la hauteur AC, ou si BC n'étoit pas égal à la hauteur de l'instrument, trouvez FC, puis BC, dans le triangle rectangle FBC (§. 20) : vous aurez alors la hauteur demandée AB.

Problème III.

34. Des deux fenêtres E & F placées à deux

Fig. 11. différents étages d'une maison, mesurer une hauteur dont on peut voir le sommet A des deux fenêtres ci-dessus.

Solution.

1°. Prenez par le moyen d'un plomb suspendu à une corde les degrés d'élévation de la fenêtre la plus haute E, au-dessus de la plus basse F, puis la hauteur de la même fenêtre F au-dessus de la terre G, ensuite des fenêtres mesurez la quantité des angles AEC & AFD (§. 43, Géom.)

2°. Ajoutez l'angle AEC à 90° , & vous aurez l'angle AEF; soustrayez de 90 degrés l'angle AFD, le reste fera la valeur de l'angle AFE.

3°. Ajoutez l'angle AEF à l'angle AFE, & retranchez la somme de 180° , ce qui restera donnera l'angle EAF. (§. 77, Géom.)

4°. Cherchez dans le triangle AEF le côté AF.

5°. Cherchez ensuite dans le triangle AFD le côté AD. (§. 20.)

6°. Ajoutez enfin à celui-ci l'élévation de la fenêtre au-dessus de la terre; ou si GB n'étoit pas horizontal, c'est-à-dire, une ligne droite parallèle à l'horizon, mesurez la ligne DF, puis par le moyen de l'angle trouvé DFB (§. 43, Géom.) mesurez à part DB (§. 20); de cette façon vous aurez la hauteur AB.

Problème IV.

Fig. 12. 35. Mesurer la distance de deux lieux A & B, tous deux accessibles d'un troisième C.

Solution.

1°. Mesurez l'angle C (§. 43, Géom.) puis les lignes AC & CB (§. 44, Géom.)

2°.

2°. Toutes ces choses étant connues, vous trouverez la valeur de l'angle A (§. 28), & par le (§. 20) vous pourrez trouver la distance demandée AB.

Problème V.

36. Trouver la distance de deux lieux AB dont un seul B est accessible par un troisième C. Fig. 132

Solution.

Prenez la mesure des angles C & B (§. 43 Géom.), ensuite la mesure de la ligne BC (§. 44 Géom.), & par ce moyen vous trouverez la distance AB qui vous donnera la largeur de la rivière qui est entre deux (§. 20).

Problème VI.

37. Trouver la distance des deux lieux inaccessibles A, B. Fig. 141

Solution.

1°. Ayant choisi à volonté trois stations D, C, E sur la même ligne droite, mesurez les angles ADC, ACD, BCE, & BEC (§. 43 Géom.), puis les lignes DC & CE. (§. 44 Géom.)

2°. Retranchez de 180° la somme des angles ADC & ACD, & encore de ACD & BCE, aussi bien que de BCE & BEC: dans le premier cas le reste est la valeur de l'angle DAC; dans le second celle de l'angle ACB, & dans le troisième la valeur de l'angle CBE. (§. 77, 8, Géom.)

3°. Trouvez à l'aide de ces connoissances les côtés AC & BC (§. 20), & par le (§. 28) l'angle CAB, & enfin le côté AB (§. 20).

290 ÉLÉMENTS DE TRIGON.

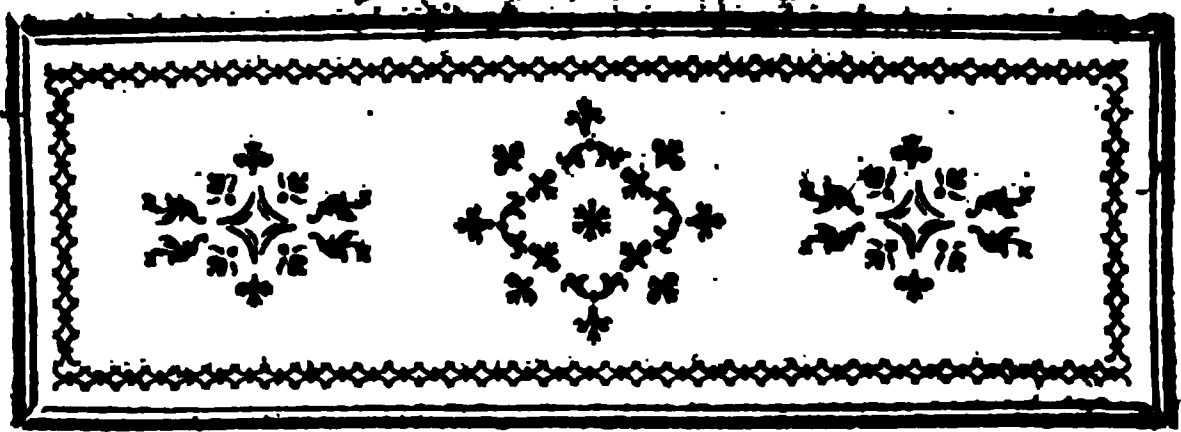
Problème VII.

38. Trouver le rapport du diamètre d'un cercle à sa circonférence.

Solution.

Fig. 15. Si le rayon du cercle CD est 10000000, le sinus AG aussi bien que la tangente ED fera un arc d'une minute DA 2909 à-peu-près : ainsi l'arc AD un peu plus grand que AG , & un peu moindre que ED , doit être aussi à-peu-près de 2909. Multipliez 2909 par 21600, c'est-à-dire, par le nombre entier des minutes contenues dans la circonférence entière, le produit sera 62834400. Le diamètre du cercle est donc à sa circonférence comme 20000000 est à 62834400, ou peu s'en faut ; c'est-à dire (en divisant l'un & l'autre par 200000) comme 100 est à 314 (§. 59 Arithm.)

Fin de la Trigonométrie.



É L É M E N T S

D E

M É C H A N I Q U E.

D É F I N I T I O N . I.

1. **L**A *Mécanique* est la science de mouvoir les corps avec de moindres forces & en moins de temps ; c'est à-dire qu'une puissance dirigée par les règles de cette science , produit un mouvement & plus grand & plus accéléré que ne feroit une autre puissance simplement appliquée.

Remarque.

2. La Mécanique , selon la définition de quelques Auteurs , traite proprement de toutes les loix du mouvement ; mais communément on restreint cette science aux machines , par le moyen desquelles la force mouvante devient plus capable de remuer une plus grosse masse , ou de produire un mouvement plus accéléré.

D É F I N I T I O N . I I.

3. On appelle *force* ou *puissance* ce qui produit

T ij

le mouvement. Ce qui reçoit le mouvement ou qui lui résiste , se nomme *masse* ou *poids*.

Corollaire I.

4. C'est pourquoi on met au nombre des forces mouvantes toutes les créatures animées & inanimées, comme les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, les poids, & les corps élastiques.

Corollaire II.

5. Puisque la Méchanique enseigne à produire un mouvement abrégé par le moyen d'une puissance, il faut qu'elle apprenne de quelle manière on doit appliquer les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, &c. pour produire ce mouvement.

D É F I N I T I O N III.

6. On appelle *force* ou *puissance vive* celle qui produit un mouvement actuel. Si cette puissance n'est qu'un poids soutenu, on la nomme *force* ou *puissance morte*, ou *qui soutient*.

D É F I N I T I O N IV.



Remarque I.

9. Il est bon d'observer en général que quand on examine la force ou les propriétés d'une machine, on ne considère point la matière dont cette machine est composée, ni la nature de la matière; ni les différentes formes que cette machine peut prendre dans d'autres circonstances, mais seulement ce qui constitue l'essence d'une telle machine, afin de connoître quelles machines sont nécessaires dans le cas dont il s'agit; car si par un trop grand ou trop long usage la matière, la forme, ou quelques autres obstacles empêchoient que la machine eût tout son effet essentiel, cela ne doit point être regardé comme provenant de ses principes qu'on considère séparément.

Corollaire.

10. Toutes les fois qu'on peut concevoir trois points dans le mouvement d'une machine, l'un auquel ce mouvement se fait, le second auquel la puissance est appliquée, & le troisième qui soutient le poids, on concevra alors que cette machine est un levier.

Remarque II.

11. Cela bien considéré, on pourra non seulement porter un jugement exact sur presque tous les instruments & les autres ouvrages de l'art, mais encore rendre raison des mouvements surprenants des animaux & calculer toutes leurs forces: c'est sur ce fondement qu'est établi tout ce que Borelli a écrit sur le mouvement des animaux.

DÉFINITION VI.

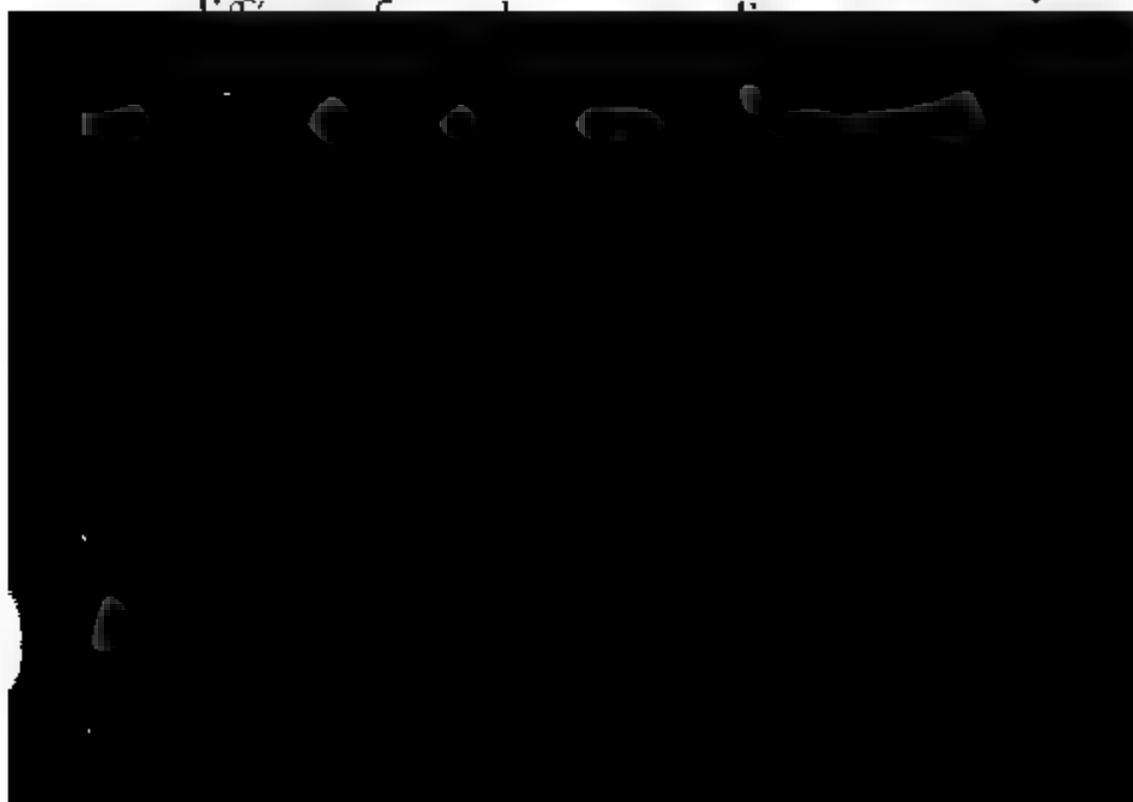
Pl. I. 12. L'aissieu dans sa roue est la roue $AFDA$;
 Fig. 2. dont les rayons sont attachés fixement à un cylindre , avec lequel elle peut tourner autour du centre commun C . Il suffit même , pour comprendre cette figure , de concevoir le cercle que décrit le cylindre lorsqu'il tourne sur son axe.

Corollaire.

13. On peut encore rapporter à l'aissieu dans sa roue le cercle que forme le cylindre tournant sur son axe , lorsque l'on conçoit que ce cercle est plus grand que le plan de la section. Par exemple , dans la Méchanique , les cabestans ordinaires $FGHI$ sont du même genre que l'aissieu dans sa roue , parceque la traverse IH , qui dans le mouvement du cylindre tourne sur son axe FG , décrit un cercle. (§. 11 Géom.)

Remarque.

14. Lorsque l'on veut faire usage des roues , on les construit de différentes façons selon la différente manière de communiquer la force , ou selon la



D É F I N I T I O N V I I I .

16. Le *tambour* ou *tympan* est une roue à laquelle une autre donne le mouvement par le moyen de ses dents.

D É F I N I T I O N I X .

17. Si l'on forme le tambour de deux disques KL & MN, & qu'à la place des dents on y mette des fuseaux ; on appelle cette machine une *lanterne*. Pl. I. Fig. 4.

D É F I N I T I O N X .

18. La *poulie*, qu'on nomme encore le *rond* du *polyspate*, est un cercle ou un rond qui tourne autour de son centre C, pendant que la puissance D tire en haut le poids E. Fig. 6.

D É F I N I T I O N X I .

19. On appelle *plan incliné* AC celui qui fait un angle oblique ACB avec la ligne horizontale. Fig. 7.

D É F I N I T I O N X I I .

20. Si ce plan tourne autour d'un cylindre, il forme une *vis*. La *vis mâle*, ou simplement la *vis*, est celle qui a ses élévations à la surface extérieure du cylindre IK. Fig. 8.

D É F I N I T I O N X I I I .

21. La *vis femelle* LM est celle qui a les élévations à la surface intérieure d'un cylindre creusé à jour. On donne encore à cette vis le nom d'*écroue*. Fig. 8.

DÉFINITION XIV.

PL I.
Fig. 1. 22. Le point C, autour duquel la machine peut
se mouvoir, est appelé *centre du mouvement*, ou
centre du repos.

DÉFINITION XV.

Fig. 1. 23. La *ligne de direction* est une ligne droite, le
long de laquelle une puissance ou une masse est en
mouvement actuel, ou pourroit être en mouve-
ment, si elle n'étoit empêchée par quelque cause.
Par exemple, si le fil qui soutient le poids O est
coupé au point A, le poids doit tomber & décrira
la ligne AO; cette ligne est celle qu'on nomme
ligne de direction de ce poids. Pareillement si la
puissance tire en H le long de la ligne BH, la li-
gne de direction de cette puissance sera BH.

DÉFINITION XVI.

Fig. 1. 24. La *distance du centre du mouvement* est la
ligne CD, qui est menée perpendiculairement du
centre du mouvement C à la ligne de direction BH.

Corollaire.



D É F I N I T I O N XVII.

26. Le *centre de gravité* est le point où le corps se divise en deux parties, qui n'ont pas plus de pesanteur l'une que l'autre.

D É F I N I T I O N XVIII.

27. Le *centre de grandeur* est le point où le corps est comme partagé en deux parties égales.

D É F I N I T I O N XIX.

28. La *ligne horizontale* est celle dont tous les points sont également éloignés du centre de la terre.

Corollaire I.

29. La *ligne horizontale* est à proprement parler l'arc d'un cercle décrit du centre de la terre.

Corollaire II.

30. Comme dans les grands cercles sur-tout, Pl. I.
les sous-tendantes, ou les cordes des petits arcs, Fig. 9.
sont presque la même chose que ces petits arcs, ou n'en different point sensiblement (§. 126 Géom.), la ligne droite MP qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C, est prise elle-même pour la ligne horizontale.

D É F I N I T I O N XX.

31. La *ligne horizontale apparente* MP est Fig. 9.
celle qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C.

DÉFINITION XXI.

32. La *gravité des corps* est cette force qui pousse les corps au centre de la terre.

Théorème I.

Pl. I. 33. Si le corps DE est suspendu sur la ligne
Fig. 10. AB, de façon que cette ligne passe par le centre de gravité, ce corps doit être en repos; il y sera pareillement s'il est appuyé sur le centre de gravité.

Démonstration.

1. Le corps étant coupé en deux parties d'égale pesanteur par le centre de gravité, la partie E pèse autant de son côté que la partie D pèse du sien: il n'y a donc aucune raison pourquoi la partie D seroit plutôt élevée que la partie E; ni l'une ni l'autre ne sera par conséquent élevée; donc le corps grave doit être en repos. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

34. Donc ce qui soutient le *centre de gravité*, soutient aussi tout le poids du corps qui y est appuyé.

Corollaire II.

même largeur & même grosseur, le centre de gravité est le même que le centre de grandeur.

Démonstration.

Car dans ce cas il n'y a point de raison pourquoi des parties égales en grandeur ne peseront pas également; elles ont donc une égale pesanteur: ainsi un corps étant divisé en deux parties également grandes par le centre de grandeur, & en deux parties également pesantes par le centre de gravité; le centre de gravité sera donc au même point que le centre de grandeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème I.

37. Déterminer le centre de gravité de quelque corps que ce soit.

Solution.

1^o. Mettez le corps donné HI sur une corde Pl. I.
tendue, ou sur la pointe d'un prisme triangulaire Fig. 11.
FG; remuez-le jusqu'à ce qu'il reste en équilibre,
vous trouverez le centre de gravité dans la ligne
KL sur laquelle il sera posé (§. 34).

2^o. Que si vous placez ce même corps sur la
même corde, ou sur le même prisme selon la li-
gne MN, vous trouverez encore le centre de gra-
vité au point O où les deux lignes se coupent
(§. 34).

3^o. On le trouve également en mettant un corps
sur la pointe d'un poinçon, en le changeant de po-
sition jusqu'à ce qu'il soit en équilibre: un plat,
une assiette, par exemple, sur la pointe d'une four-
chette ou d'un couteau.

Théorème III.

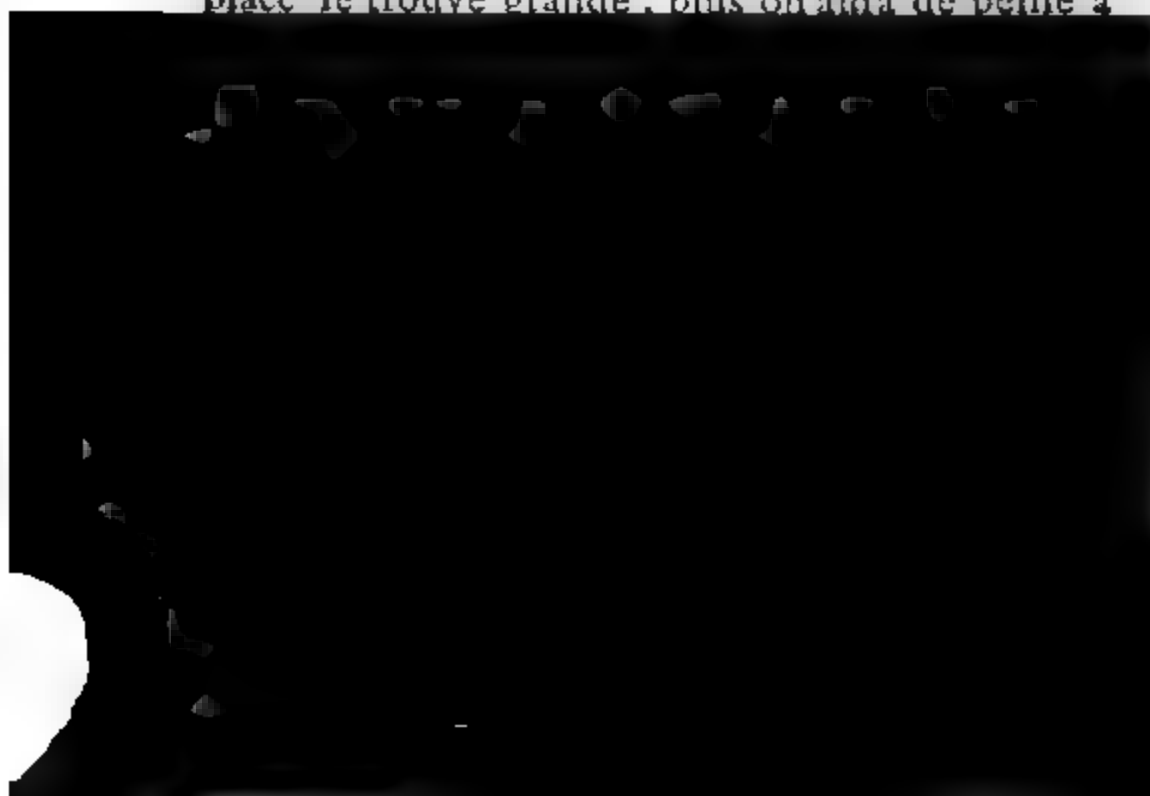
38. Si la ligne de direction tombe sur la base sur laquelle ce corps est posé, il doit rester immobile, & il ne sauroit tomber; mais si-tôt que la ligne de direction s'éloignera de la base, le corps tombera du côté vers lequel la ligne de direction se porte.

Démonstration.

La ligne de direction est une ligne droite selon laquelle un corps se meut actuellement, comme dans le cas présent, ou se mettroit en mouvement s'il n'en étoit empêché (§. 23). Or si cette ligne tombe sur la base d'un corps, ce corps ne peut se mouvoir selon cette ligne; il restera donc immobile. *Ce qui étoit d'abord à prouver.* Mais si la ligne de direction tombe hors de la base d'un corps, rien n'empêche que ce corps ne soit en mouvement en suivant cette ligne; il doit donc tomber. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

39. Plus donc la base sur laquelle un corps est placé se trouve grande, plus on aura de peine à



Démonstration.

Supposons que le rayon CL ne soit point perpendiculaire à la ligne MP, on pourra donc tirer du point L une autre perpendiculaire à la ligne MP, par exemple, la ligne LP (§. 69 Géom.) : & parceque l'angle P est un angle droit, la ligne LC sera donc plus grande que la ligne LP. Mais comme la ligne LC est la même que la ligne LN, la ligne LN seroit donc plus grande que la ligne LP ; ce qui étant absurde, l'angle qui se forme au point C doit être un angle droit. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorème IV.

41. La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horizontale apparente.

Démonstration.

Les corps graves tendent par la force de la gravité vers le centre de la terre (§. 32) ; par conséquent leur ligne de direction est la même que le rayon de la terre CL. (§. 23, Méch. & §. 13, Géom.)

La ligne horizontale apparente MP touche la circonférence de la terre au point C (§. 31). La ligne de direction des corps graves doit donc faire un angle droit avec la ligne horizontale apparente (§. 40) ; elle lui est par conséquent perpendiculaire (§. 18, Géom.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

42. Comme toute la pesanteur des corps est

rassemblée dans le centre de gravité (§. 35), c'est de ce centre qu'il faut tirer perpendiculairement la ligne de direction des corps graves, jusqu'à la ligne horizontale apparente.

Problème II.

43. Trouver si un corps grave placé dans quelque endroit tombera ou non.

Solution.

1°. Il faut chercher le centre de la gravité (§. 37.)

2°. Tirez ensuite de ce centre une ligne perpendiculaire sur la ligne horizontale apparente (§. 69, Géom.) Si la ligne perpendiculaire tombe dans la base du corps, il ne tombera pas. Si elle s'écarte de la base, le corps tombera du côté où la ligne perpendiculaire s'éloigne de la base. *

Démonstration.

La ligne perpendiculaire ayant été menée du centre de gravité vers la ligne horizontale apparente, elle fera la ligne de direction du corps (§. 42). Si elle tombe dans la base, le corps ne fauroit tomber; si au contraire elle s'en éloigne, le corps doit tendre dans son mouvement vers le côté où tombe la ligne de direction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

44. Par la solution de ce problème on peut rendre raison de toutes les positions & de toutes les façons de marcher possibles des hommes & des

animaux , comme l'a fait M. Borelli dans son ouvrage du Mouvement des animaux , part. 1 , prop. 145 , & suivantes.

Théorème V.

45. Si l'on suspend aux deux extrémités AC du levier ABC deux poids inégaux G , F , qui seront en même raison que leurs distances réciproques le sont à l'égard du point d'appui B ; l'un & l'autre sont en équilibre , & ils ne sauroient se mettre en mouvement. Pl. I.
Fig. 12.

Démonstration.

Supposons , par exemple , que le poids F pese une livre , & le poids G trois livres ; que les lignes de direction CF & AG soient perpendiculaires à CA aux points A & C ; les degrés de distance du poids F , qui ne pese qu'une livre , se compteront depuis B jusqu'à C , & ceux du poids G se compteront de A en B (§. 24) ; par conséquent dans notre hypothèse $AB : BC = 1 : 3$; & comme les corps ne perdent rien de leur pesanteur , quelque changement qui se fasse dans leur figure , imaginons ces deux poids changés en deux cylindres qui aient une grosseur relative à chacun d'eux , de façon qu'une demi-livre de ce cylindre reçoive la longueur de la moindre distance AB ; ainsi le cylindre IK , auquel a été changé le moindre poids F , contiendra deux parties égales à AB ; & l'autre cylindre HI qui a été fait du gros poids G , en contient six parties. Que si l'on imagine la ligne BC prolongée vers D , jusqu'à ce que la distance de CD soit égale à la distance AB ; & au contraire , si l'on imagine la ligne AB prolongée vers E jusqu'à ce que la distance AE soit égale

à la distance BC , la ligne ED sera égale à la longueur de tout le cylindre HK . Or la ligne ED est divisée en deux parties égales au point B , puisque depuis B jusqu'à E il y a quatre parties égales à AB , comme depuis B jusqu'à D . Le centre de gravité du cylindre HK étant le même que son centre de grandeur (§ 36), la ligne BM à laquelle il est suspendu passe par son centre de gravité; le cylindre est donc en repos (§ 33); par conséquent ni l'un ni l'autre des deux cylindres HI & IK ne doit l'emporter, de même que les deux poids dont ils ont été formés; ils doivent donc avoir la même pesanteur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

46. C'est pourquoi si les poids F, G doivent être égaux, les distances AB & BC doivent être aussi égales : car $F : G = AB : BC$. Donc si $F = G$, AB le sera aussi à BC (§. 53, Arithm.)

Remarque.

47. Toutes les démonstrations que l'on peut faire dans toute la Méchanique sont appuyées sur ce seul Théorème : c'est pour le rendre plus familier, à l'exemple de Jungnickelius (Clef de la Méchanique, pages 107, 108), que je vais faire voir comment on peut le prouver par l'expérience.

Problème III.

48. Examiner la loi fondamentale de la Méchanique, ou mettre en expérience le précédent Théorème.

Solution.

Solution.

1°. Faites travailler par un menuisier un solide en forme de prisme quadrangulaire, dont la largeur excède la grosseur, & dont on puisse séparer 8 parties de même longueur; & de plus une partie d'une longueur double, une autre d'une triple, & une enfin d'une longueur quadruple.

2°. Mettez la partie qui a une longueur double sur la pointe d'un prisme triangulaire, vous verrez qu'elle restera en équilibre si la partie AC est égale à la partie CB. Pl. I.
Fig. 11

3°. Que si vous placez sur le même prisme la partie qui a une longueur triple DE, de façon que FD comprenne deux parties, & EF une seule; il faudra, pour que DE soit en équilibre, que vous ajoutiez trois parties de la longueur simple sur la partie FE.

4°. Pareillement si vous mettez sur la pointe du prisme la partie d'une longueur quadruple GH, de façon que GI ait trois parties, & que HI n'en ait qu'une seule, il en faudra ajouter 8 autres sur HI, pour que GH soit en équilibre.

Toutes ces expériences sont conformes à la loi fondamentale que j'ai donnée dans la démonstration du théorème précédent.

Démonstration.

Supposons que les parties des divisions AC & CB, DF & FE, GI & IH, n'ont aucune pesanteur, & qu'à la place de ces pesanteurs on les suspende aux centres de leurs gravités, qui se trouvent au milieu (§. 36) des poids, qui égalent en même temps la pesanteur des parties & celle des

divisions qu'on auroit mises dessus (§. 35). Comme les divisions qui sont en équilibre sont aussi parallèles à l'horizon, les lignes de direction de ces poids doivent être perpendiculaires aux lignes AB , DE & HG (§. 41), & leurs distances du centre du mouvement étant partagées également par les demi lignes AC & CB , DF & FE , GI & IH , seront égales. Or les gravités des parties qui pesent également, étant en même raison que les distances considérées relativement l'une à l'autre : supposé, par exemple, IG de trois livres & IH avec les divisions placées dessus de 9 livres, IH n'aura qu'un degré de distance, tandis que IG en aura trois : il est donc clair que cette expérience confirme le théorème précédent. *Ce que nous avions à démontrer.*

D É F I N I T I O N XXII.

49. La *balance* est un instrument par le moyen duquel on peut rechercher & découvrir la pesanteur des corps.

Problème IV.

Pl. II.
Fig. 14.

50. Construire une balance juste & exacte.

Solution.

1°. Divisez le *fléau* AB en deux parties au point C , pour en faire deux bras AC & CB . Placez à l'extrémité de ces bras deux bassins de même pesanteur D , E .

2°. Placez perpendiculairement au point C l'aiguille CK , de façon que le fléau AB puisse se mouvoir facilement dans la châsse. Si après avoir su-

pendu la balance, l'aiguille ne sort point de la châsse HI, il est manifeste que les corps placés dans les bassins sont d'une égale pesanteur.

Démonstration.

Si l'on suspend une balance au point I, l'anse HI sera perpendiculaire à la ligne horizontale (§. 41); par conséquent, lorsque l'aiguille CK est cachée dans l'anse, comme elle est perpendiculaire au fléau AB, celui-ci sera parallèle à l'horizon. Mais comme les lignes de direction des poids D & E font des angles droits avec les bras AC & CB, leurs distances sont égales à ces bras (§. 24). Or AC & CB étant égaux, les poids suspendus de part & d'autre aux points D & E doivent aussi être égaux (§. 46). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

§ 1. C'est pourquoi si les bras AC & CB ne sont pas aussi longs l'un que l'autre, la balance est trompeuse.

Problème V.

§ 2. Epruver si une balance est juste ou non.

Solution.

Mettez le bassin D à la place du bassin E, & E en D; ou changez les poids des bassins: si vous trouvez encore l'équilibre, la balance est juste; s'il n'y a plus d'équilibre, la balance est trompeuse.

Pl. II.
Fig. 14.

Démonstration.

Si la balance est trompeuse, les bras ne sont point

également longs (§. 51), & par conséquent le bassin suspendu à celui qui a plus de longueur, doit être plus léger que l'autre (§. 45); c'est pourquoi si vous changez les bassins de bras & que vous mettiez le plus léger au bras le plus court, il n'y aura plus d'équilibre. *Ce que j'avois à démontrer.*

D É F I N I T I O N XXIII.

Pl. II. 53. La *Romaine* ou le *peson* est une balance, Fig. 15. avec laquelle par le moyen d'un poids, on trouve la pesanteur de différents corps.

Problème VI.

54. Construire une balance romaine.

Solution.

1°. Divisez la verge M N en autant de parties égales que vous voudrez.

2°. Mettez à l'extrémité de la première division O une languette ou lame de fer CP perpendiculaire à la verge, comme dans la balance ordinaire.

3°. Chargez le bras le plus court C M, jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec le plus long C N.

4°. Suspendez au bras qui a le plus de longueur le poids R, qui puisse glisser le long de la verge, comme vous voudrez : cela fait, vous aurez la ro-

on peut par le moyen d'un seul poids peser les corps de différente gravité : l'instrument M N C est donc une balance romaine (§. 53). *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

55. Pour agir avec plus de sûreté , il faut déterminer par expérience dans le bras le plus long les points 1 , 2 , 3 , 4 , &c. on peut alors se passer de mettre en équilibre les deux bras , sur-tout quand il s'agit de peser des masses considérables , comme un chariot chargé de foin ; car plus le bras le plus long surpasse le petit en pesanteur , moins il en faudra dans le poids que l'on fait glisser sur la verge pour peser les plus grandes masses.

Problème VII.

56. Connoissant la gravité du levier A B , la distance du centre de gravité V , les distances du poids A C & de la puissance C B avec le poids O , trouver la grandeur d'une puissance morte. Pl. I.
Fig. 1.

Solution.

1°. Imaginons un levier sans pesanteur , au lieu duquel on aura placé au centre de gravité V le poids G qui lui sera égal (§. 35) ; nous trouverons qu'il faudra placer le poids au point A , pour que le levier soit en équilibre (§. 45).

2°. Retranchons le poids trouvé du poids donné , le reste sera le poids que la puissance placée en B devra soutenir.

3°. Mais parceque ce poids est avec la puissance morte , qui doit être placée au point B , en même raison que B C & C A (§. 45) , nous trou-

V iij

verons cette puissance par la regle de trois (§. 85 Arithm.)

E X E M P L E.

Supposons $CA = 1$, $CV = 2^1$, $CB = 5$,
 $G = 10$ liv. $O = 300$ liv.

$1 \text{ — } 2 \text{ — } 10$	$5 \text{ — } 1 \text{ — } 280$
10	$5) 25 (56 \text{ liv. la puissance}$
<hr/>	<hr/>
20 liv.	30
300 le poids	30
<hr/>	<hr/>
280	0

Problème VIII.

Pl. I. 57. Connoissant la pesanteur du levier AB , la
 Fig. 1. distance du centre de gravité CV , les distances
 de la puissance BC & du poids CA avec la force
 morte, trouver le poids.

Solution.

1°. Cherchez comme dans le problème précédent la partie du poids que le levier seul peut soutenir.

2°. Cherchez de même l'autre partie du poids que la puissance appliquée au point B peut aussi

E X E M P L E.

Supposons $CA = 1$, $CV = 2$, $CB = 5$,
 $G = 10$ liv. la puissance morte 56 liv.

$$1 \text{ — } 2 \text{ — } 10$$

$$10$$

20 La premiere partie du poids.

$$1 \text{ — } 5 \text{ — } 56$$

$$5$$

280 l'autre partie du poids.

20 la premiere.

300 le poids entier.

Problème IX.

58. Connoissant la gravité du levier G , le poids P . I.
 O , la puissance morte, la longueur & le centre Fig. 1.
 de gravité V du levier AB , trouver le centre com-
 mun de gravité C , c'est-à-dire, le point d'appui
 où il faut poser le levier, pour que la puissance
 soutienne le poids

Solution.

1°. Cherchez d'abord le centre commun de gra-
 vité Z , celui de la puissance morte appliquée au
 point B , & celui de gravité du levier G , en di-
 sant, VB est à ZB , ou à la distance du centre
 commun de gravité, comme la somme de la puis-
 sance morte & de la gravité du levier est à la
 gravité du levier. (§. 45.)

2°. Retranchez ZB de AB , & vous aurez AZ .

3°. Imaginez le poids suspendu au point Z égal
 à la gravité du levier G , & à la puissance morte en

V iv

B prises ensemble (§. 35) ; vous trouverez comme auparavant la ligne CZ, & par conséquent le point C que vous cherchiez.

E X E M P L E.

Supposez la puissance placée en B == 66, la gravité du levier G == 10, le poids O == 300 livres, A B == 6, V B == 3.

$$66 \text{ --- } 10 \text{ --- } 3$$

$$\frac{3}{30}$$

$$\frac{30}{66}$$

$$\frac{30}{66} = \frac{5}{11} = ZB.$$

$$\frac{66}{11} = AB.$$

$$\frac{61}{11} = AZ.$$

$$366 \text{ --- } 66 \text{ --- } 61$$

c'est- 61 --- 11 --- 61 (§. 59, 96, Arithm.)
à-dire,

$$\frac{11}{11}$$

$$\frac{61}{61} (1 = AC.$$

Théorème VI.

Pl. II. 59. Si le poids est placé au point B, entre le
Fig. 16. centre du mouvement C & le lieu de la puissance morte A, celle-ci fera en même raison avec le poids qui est au point B, que la distance du poids CB avec la distance de la puissance CA.

Démonstration.

Prolongez CA vers D , jusqu'à ce que $DC = CA$; il est évident qu'alors la puissance qui est en A , a autant de valeur que la puissance qui est en D (§. 46). Or si la puissance qui est en D soutient le poids qui est en B , elle est avec lui en même raison que BC avec CD , ou CA (§. 45); par conséquent il est nécessaire que la puissance qui est en A , soit en même raison avec le poids B , comme BC l'est avec CA . *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

60. Nous nommerons dans la suite ce levier, *homodrome*, & le premier *hétérodrome*.

Problème X.

61. Connoissant la gravité E , & le centre de Pl. II. gravité F du levier homodrome CA , le poids G , Fig. 16. la distance du poids CB & de la puissance morte CA , trouver la quantité de la force morte au point A .

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée au point A , pour soutenir seulement le levier (§. 59.)

2°. Cherchez aussi la puissance qui, appliquée au même point A , puisse seulement soutenir le poids donné G . (§. 59.)

3°. Réduisez ces deux puissances trouvées en une somme; en les ajoutant l'une à l'autre, vous aurez la force que vous cherchez.

E X E M P L E.

Soit $CB = 1$, $CF = 3$, $CA = 6$, $G = 300$
liv. $E = 10$ liv.

$6 - 3 = 10$
ou $2 \quad 1 \quad 10$ (§. 95, 96, Arithm.)

$\frac{1}{10}$
 10 (5 l. premiere partie de la puiss.

$6 - 1 = 300$
 $\frac{1}{300}$

300 (50 l. l'autre partie de la puiss.
 66 5 liv. la premiere.

55 liv. la puissance entiere.

Remarque.

62. Pour comprendre tout l'ouvrage que Borrelli a fait sur le mouvement des animaux, il suffit de se rendre familiers les problèmes que nous avons donnés touchant le levier, & de se souvenir de ce que nous avons dit au paragraphe 10. Je ne parlerai point ici d'une infinité de cas dans lesquels il faut faire usage de ces sortes de calculs.

Démonstration.

Car pendant que la puissance forme l'arc LM dans son mouvement, le poids en s'élevant forme celui de HN : l'espace que parcourt le poids est donc à celui que la puissance parcourt, ce que l'arc HN est à l'arc LM , c'est-à-dire, comme HI à IL , à cause de l'égalité des angles au point I (§. 40, Géom.) ; & par conséquent, comme la force morte est au poids (§. 45). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

64. Si vous abaissez la perpendiculaire NO du point N sur HI , & du point M , celle qui est marquée MR sur IL , NI fera à l'égard de NO , comme MI à l'égard de MR (§. 10, Trigon.) ; par conséquent $NI : MI = NO : MR$ (§. 83, Arithm.). L'espace que le poids parcourt en montant est donc à celui que la puissance parcourt en descendant, ce que la puissance morte est au poids.

Corollaire II.

65. Il s'ensuit de là qu'il faut autant de force pour lever un poids de trois livres à la hauteur d'un pied, qu'il en faut pour lever une livre à la hauteur de trois pieds, dans le même espace de temps.

Corollaire III.

66. Comme l'on mesure la vitesse du mouvement d'un corps par l'espace qu'il a parcouru dans un temps déterminé, ainsi la vitesse avec laquelle une puissance se meut sera en même raison avec

la vitesse du mouvement d'un poids , qu'est un poids avec la force morte.

Remarque.

67. Ainsi nous voyons que le levier n'augmente point la force , mais qu'il la met en situation de produire un mouvement plus lent Si l'on veut donc accélérer ce mouvement , il faut placer la puissance au point H . & le poids au point L : alors la force est plus grande que le poids , & le mouvement se fera dans un moindre espace de temps.

Théorème VIII.

Pl. I. 68. Si la ligne de direction de la puissance morte
Fig. 2. fait un angle droit avec le rayon de la roue AC ,
& que la ligne de direction du poids E fasse le même angle avec le rayon du cylindre CB , la puissance morte est au poids comme le rayon du cylindre CB au rayon de la roue AC.

Démonstration.

La puissance soutiendrait le poids quand il n'y auroit que la ligne AB : ainsi comme le centre du mouvement est au point C , le poids au point B , & la puissance morte appliquée à l'angle droit au point A , celle-ci sera à l'égard du poids , comme

Corollaire I I.

70. Si l'on connoît l'angle GFC que la puissance forme avec le rayon de la roue aussi connu, on trouvera par la Trigonométrie la ligne GC . (§. 20, Trigon.)

Corollaire I I I.

71. La puissance fait un très grand effet quand la ligne de direction fait un angle droit avec le rayon de la roue. (§. 25, 45.)

Corollaire I V.

72. Tous les problèmes qui sont proposés sur le levier peuvent être appliqués aux roues, parce que la roue peut être considérée comme un levier à raison de la puissance morte. (§. 10.)

Problème XI.

73. Connoissant le poids C , & les rayons des Pl. II.
aiffieux BH , AD , EF , & des roues BA , DE , Pg. 19.
 FG , trouver la force morte qui doit être placée au point G .

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée à la circonférence de la première roue pour pouvoir soutenir le poids C suspendu au cylindre BH . (§. 68.)

2°. Regardez cette puissance comme un poids suspendu au cylindre de la seconde roue. Déterminez encore la puissance qui, étant appliquée à la circonférence de cette roue, puisse soutenir & la roue & le poids. (§. 68.)

318 É L É M E N T S.

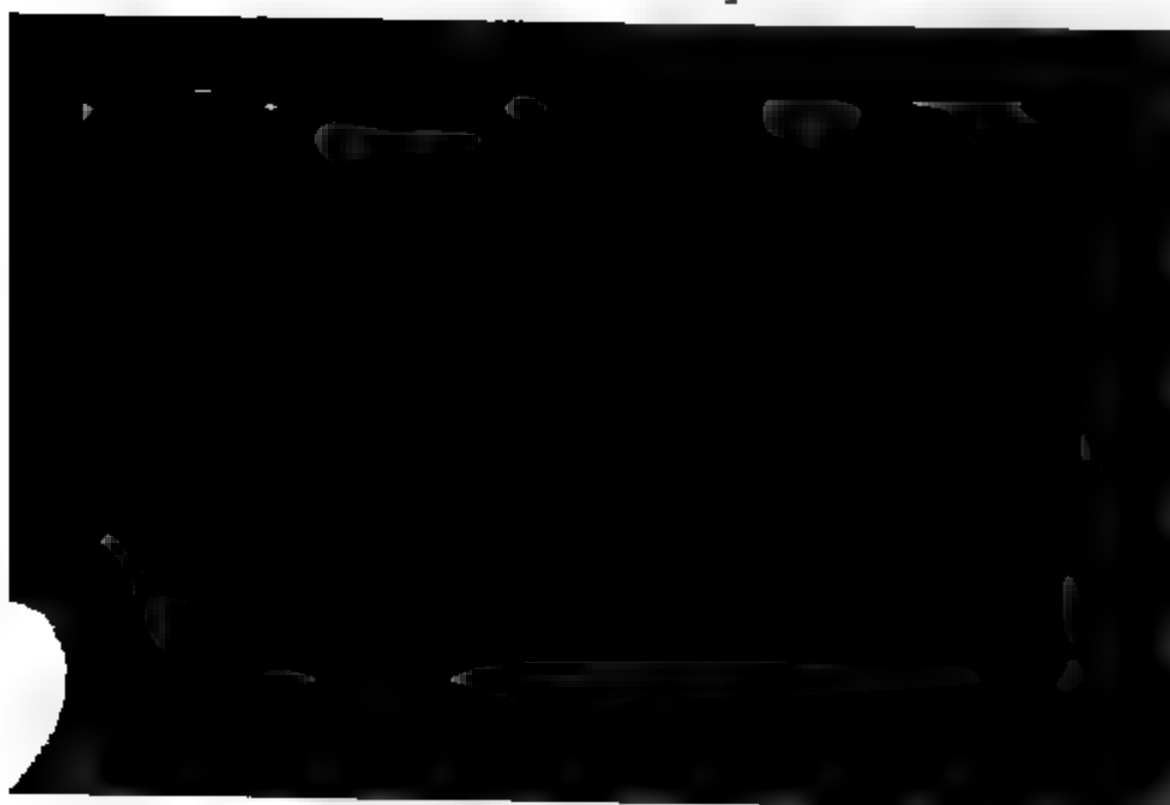
3°. Continuez cette opération jusqu'à ce que vous ayez trouvé la puissance qui doit être appliquée à la dernière circonférence.

E X E M P L E.

Soit $C = 6000$ liv. $BH = 6$, $AB = 34$,
 $AD = 5$, $DE = 35$, $EF = 4$, $FG = 27$.

$\begin{array}{r} 34 - 6 - 6000 \\ \text{ou } 17 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 18000 \end{array}$	$\begin{array}{r} x \\ x\eta \\ x\eta\eta\eta \\ x\eta\eta\eta\eta \\ xxx \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1058 \frac{14}{17} \text{ ou} \\ 1059 \text{ puissance} \\ \text{à appliquer en} \\ \text{A.} \end{array} \right.$
$\begin{array}{r} 35 - 5 - 1059 \\ 7 \quad 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\phi x \\ x\phi\phi\phi \\ \eta\eta\eta \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} 151 \frac{2}{7} \text{ puissance} \\ \text{en E.} \end{array} \right.$
$\begin{array}{r} 27 - 4 - 151 \frac{2}{7} \\ \quad 4 \\ \hline 605 \frac{1}{7} \end{array}$	$\begin{array}{r} x \\ x \\ x\phi x \\ \phi\phi\phi \\ x\eta\eta \\ 2 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} 22 \frac{11}{17} \text{ puissance} \\ \text{en G.} \end{array} \right.$

Remarque.



Théorème IX.

75. Si la puissance met un poids en mouvement Pl. I.
par le moyen de l'aissieu dans la roue, l'espace de Fig. 21
la puissance est en même raison avec l'espace que
le poids parcourt, comme le poids avec la puissance morte.

Démonstration.

Pendant que la roue tourne une fois, le cylindre IBK fait aussi un tour (§. 12); & ainsi le poids E est élevé à la hauteur d'autant de pieds que la circonférence de la roue en contient: donc la circonférence du cylindre représente l'espace que le poids parcourt, comme la circonférence de la roue celui que la puissance parcourt. Ces deux espaces sont donc l'un à l'égard de l'autre, comme la circonférence du cylindre à l'égard de la circonférence de la roue; ou, ce qui revient au même, comme le rayon du cylindre CB à l'égard du rayon de la roue CA; & par conséquent comme la puissance morte à l'égard du poids (§. 68). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

76. Il faut observer que lorsque plusieurs roues s'engrenent l'une dans l'autre, si elles sont attachées au même cylindre, elles font autant de tours les unes que les autres dans le même espace de temps. Si elles ne sont point attachées au même cylindre, & qu'une petite reçoive son mouvement d'une grande, pendant que celle-ci fait un tour, celle-là en doit faire autant que la grande contient de fois la circonférence de la petite, ou, ce qui revient au même, autant que le nombre des

dents de la grande doublera le nombre des dents de la petite.

Problème XII.

Pl. II. 77. Connoissant en quelle raison sont les rayons
Fig. 19. ou les circonférences des petites roues avec les rayons & les circonférences des grandes, trouver les tours que fait une roue qui tourne avec grande vitesse, tandis qu'une grande, dont le mouvement est lent, ne tourne qu'une fois.

Solution.

1°. Divisez les circonférences des grandes roues par les circonférences des petites.

2°. Multipliez les quotients les uns par les autres, le produit indiquera le nombre des tours que fait la roue G qui tourne avec vitesse, dans l'espace de temps que la roue A n'en fera qu'un, en tournant lentement. (§. 76.)

E X E M P L E.

Soit la circonférence de la roue A 24, de la moindre D 12, de l'autre plus grande E 36, & de l'autre plus petite F 9.

24)

36) 4



nombre des dents , parceque dans les roues qui se rencontrent , les dents sont aussi grandes les unes que les autres.

Problème XIII.

79. Connoissant le nombre des révolutions de la roue qui tourne avec vitesse , tandis que celle qui ne tourne que lentement ne fait qu'un seul tour , trouver le nombre des roues & le nombre de dents que contiennent ces roues & ces pignons , ou le nombre des fuseaux qui forment ces lanternes.

Solution.

1°. Réduisez en ses produifants le nombre donné des révolutions : autant il y aura de produifants , autant il faudra de roues dentées & de pignons ou lanternes.

2°. Multipliez séparément par chaque produifant trouvé un nombre de dents que vous aurez déterminé dans les pignons , les produits vous donneront le nombre des dents des roues qui s'engrenent avec les pignons. (§. 77, 78.)

E X E M P L E.

Une roue qui tourne avec vitesse fait 40 révolutions , tandis que celle qui tourne lentement n'en fait qu'une. Comme 40 est le produit de 5 par 8 , on conçoit qu'il faut deux roues dentées , & autant de pignons ou lanternes qui s'engrenent dans ces roues. Si les lanternes ont six fuseaux , la roue A qui tourne lentement aura 48 dents , celle du milieu E en aura 30 , & la troisième G , à laquelle la puissance est appliquée , n'en aura point , parcequ'elle ne doit recevoir sa figure

Pl. II.
Fig. 19

que de la maniere dont on jugera à propos d'appliquer la puissance.

Problème XIV.

80. Connoissant la puissance & le poids , trouver le nombre des roues , & les raisons de leurs rayons aux rayons des axes , ou petites roues attachées au même cylindre que les grandes.

Solution.

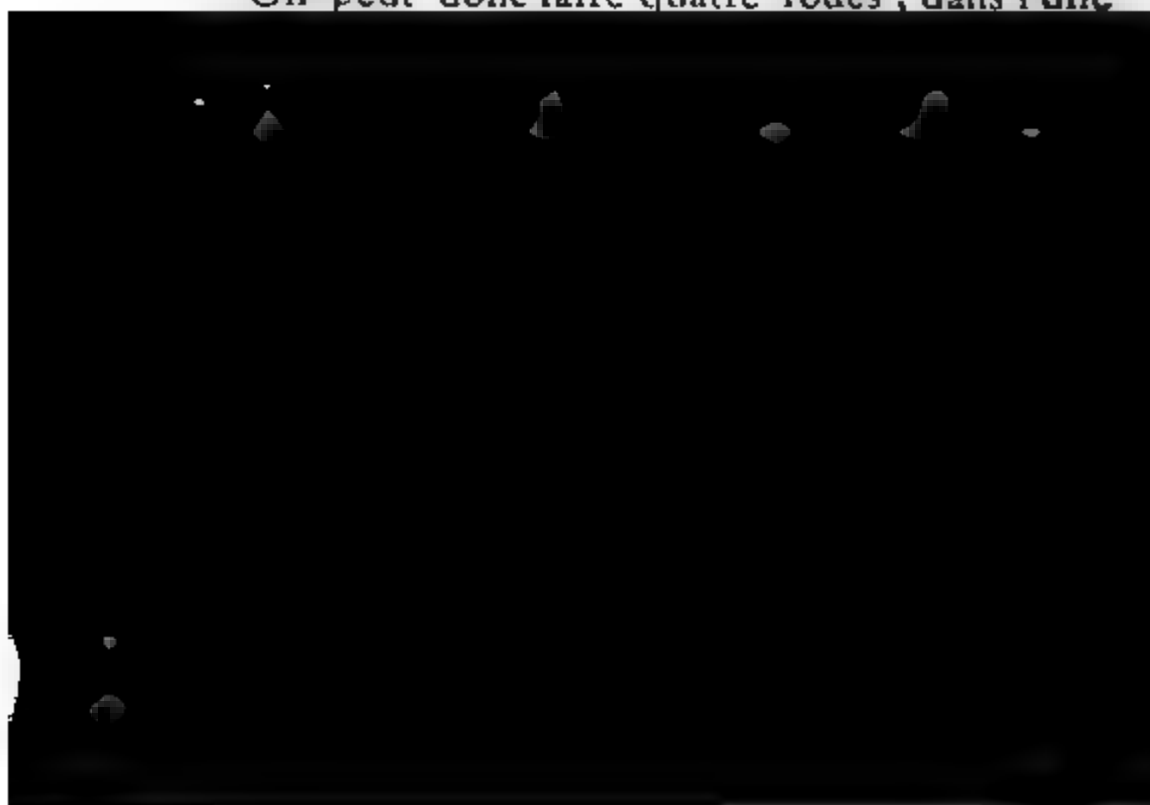
1°. Divisez le poids par la force , afin de connoître combien de fois celle-ci est renfermée dans celui-là.

2°. Séparez le quotient des produifants car le nombre des produifants est précisément le nombre des roues ; & les diametres des pignons , tambours, ou lanternes, font en même raison avec les diametres des roues appliquées au même cylindre, que l'unité avec chaque produit (§. 73).

E X E M P L E.

Supposons le poids de 30000 livres, & la puissance de soixante livres , le quotient réduit aux produifants 4. 5. 5. 5. sera de 500 livres.

On peut donc faire quatre roues , dans l'une



lement, en divisant le nombre qui doit être réduit par des petits nombres. Quelquefois le nombre donné ne peut se réduire en nombres purement entiers : dans ce cas il faudra retenir la fraction avec ces nombres entiers ; ou , si la chose est praticable , il faut un peu augmenter le nombre jusqu'à ce qu'il puisse être exactement divisé.

Théorème X.

82. Si la puissance K , dont la direction DK est Pl. I: parallèle à la longueur du plan A G , soutient le Fig. 7. corps D sur le plan incliné AC , la puissance K est en même raison avec le corps D , que la hauteur du plan AB avec la longueur AC.

Démonstration.

Soit DH la ligne de direction du poids D , nous pouvons concevoir toute la pesanteur comme réunie dans le seul point F (§. 23 , 35) ; par conséquent EF est la distance du poids à l'égard du centre du mouvement , & ED la distance de la puissance (§. 24). Mais comme DEF représente un levier (§. 10) dont le centre du mouvement est au point E , la puissance K , qui est au point D , est à l'égard du poids D , qui est au point F , comme EF à l'égard de ED (§. 45) : & parceque les angles DEG & EFG sont droits , & que l'angle EGF est commun aux deux triangles EFG & DEG , l'angle EDF sera donc égal à l'angle FEG , & l'angle DEF à l'angle EGF (§. 78 Géom.) ; donc $EF : ED = GF : EG$ (§. 148 Géom.) : & comme les angles verticaux au point G sont égaux (§. 40 , Géom.) , & les angles formés aux points F & H sont droits , $GF : EG$ sera égal à $GH : GC$ (§. 148

Géom.). Enfin comme $GH : GC = AB : AC$ (§. 149 Géom.), & par conséquent $EF : ED = AB : AC$ (§. 57 Arithm.). AB est à l'égard de AC , comme la puissance morte à l'égard du poids. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorème XI.

Pl. II. § 3. Si le poids R , placé sur le plan incliné LN ,
Fig. 20. est soutenu par la puissance dont la direction RI est parallèle à la base MN , la puissance est à l'égard du poids, comme la hauteur LM à l'égard de la base MN .

Démonstration.

On voit par la démonstration du théorème précédent (§. 82), que l'on peut regarder le cas présent comme si dans un levier TQS la puissance étoit placée au point T & le poids au point S : par conséquent la puissance est à l'égard du poids comme QS à l'égard de TQ ou de RS (§. 45) : & comme par la démonstration dont nous venons de parler on a prouvé que les triangles RQS , SQO , OPN & LMN sont semblables, on aura $QS : SR = SO : QS = OP : PN = LM : MN$ (§. 148, 149 Géom.) ; & par conséquent la puissance est en même raison avec le poids, que LM avec MN .

(§. 20). Or la puissance a la direction de son mouvement parallèle à la base.

Corollaire I I.

85. Par conséquent plus les filets ou arêtes de la vis sont ferrés, plus la vis a d'efficace, la même grosseur du cylindre toutefois posée.

Corollaire I I I.

86. Si le poids commence son mouvement en *Pl. II.*
N & v a jusqu'à O, il a été élevé à la hauteur OP, *Fig. 201*
& la puissance suit dans son mouvement la ligne PN; donc l'espace parcouru par la puissance est à l'égard de l'espace que parcourt le poids, comme le poids à l'égard de la puissance morte (§. 83).

Corollaire I V.

87. La même chose se trouve dans la vis; car tandis que la puissance est en mouvement autour de la vis, le poids baisse par la distance des filets; par conséquent l'espace que le poids parcourt est en même raison avec l'espace que la puissance parcourt, que la distance de deux filets avec la circonférence de la vis, c'est-à-dire, comme la puissance morte avec le poids (§. 84).

Problème X V.

88. Connoissant la puissance, la circonférence de la vis & la distance des filets, déterminer la résistance que la puissance peut vaincre par le moyen de la vis.

Solution.

Cherchez un quatrieme nombre proportionnel à
X iij

la distance des filets , à la circonférence de la vis ,
& à la puissance (§. 85 Arithm.) , & vous aurez
ce que vous cherchez.

E X E M P L E.

Soit la distance des filets 3", la circonférence de
la vis de 25", la puissance de 30 livres.

$$\begin{array}{rcccl} 3 & \text{---} & 25 & \text{---} & 30 \\ 1 & & 10 & 10 & (\S. 59 \text{ Arithm.}) \end{array}$$

Résistance 250 à vaincre.

Problème XVI.

89. Connoissant la puissance & le poids , trou-
ver le diamètre de la vis & la distance des filets.

Solution.

1°. Divisez le poids par la force ; 1 sera la dis-
tance des filets , & le quotient sera la circonfé-
rence de la vis (§. 84).

2°. Multipliez par ce quotient que vous avez
trouvé , la distance des filets que vous aurez prise
par pouces ou par lignes , suivant les circonstan-
ces , & vous aurez la circonférence de la vis en
pouces ou en lignes. (§. 85 Arithm.)

3°. Par-là vous trouverez son diamètre (§.

EXEMPLE.

Soit le poids de 250 livres, la force de 30.

$$\begin{array}{r} x \\ 28\phi (8\frac{1}{2}) \\ 3\phi \end{array}$$

Soit la distance des filets 3'''.

La circonférence de la vis 25.

$$\begin{array}{r} 314 \text{ --- } 100 \text{ --- } 25 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 28\phi\phi \end{array} \quad \begin{array}{r} 2500 \\ 314 \end{array} \quad \begin{array}{l} 34^2 \\ (7\frac{302}{314} \text{ ou } 7\frac{151}{157}) \end{array} \text{ le diametre de la vis.}$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} 280$$

Corollaire.

90. Transportez sur la ligne BC la circonférence trouvée de la vis 25''' ; élevez une perpendiculaire AB sur B (§. 70 Géom.) , achevez le rectangle ABCD (§. 99 Géom.) , transportez sur cette perpendiculaire les distances des filets , depuis B jusques en A , & depuis C jusques en D , autant de fois qu'il doit y avoir de filets , & tirez les filets B₁ , 1. 2 , 2. 3 , 3. 4 . &c. le plan ainsi marqué , appliqué autour d'un cylindre dont la circonférence est égale à AC , marquera les filets qu'on doit former sur le cylindre.

Pl II.

Fig. 211

Remarque.

91. On tourne souvent la vis par le moyen d'une manivelle , qui avec le cylindre forme une machine du même genre que la roue avec son aisseu (§. 13) , & qui par conséquent augmente la force de la vis (§. 68).

D É F I N I T I O N XXIV.

Pl. II. 92. On appelle vis sans fin celle qui fait tourner
Fig. 22. une roue à dents

Corollaire I.

93. Les dents de la roue étoilée doivent s'engrener dans les filets obliques de la vis.

Remarque.

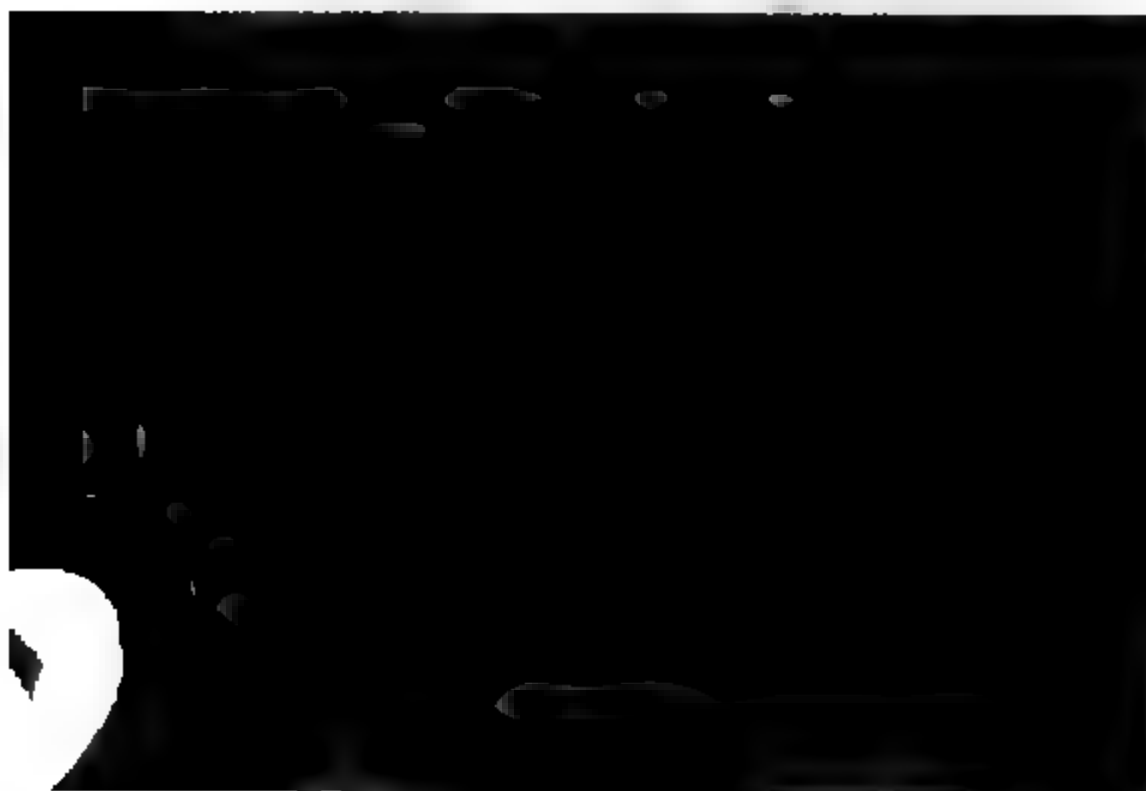
94. La vis infinie n'a besoin que de trois filets.

Corollaire II.

95. Tandis que la vis fait un tour, la roue n'avance que d'une dent; de là vient que le mouvement de la roue est très lent.

Théorème XII.

Pl. I. 96. Si la force D, par le moyen d'une corde qui
Fig. 6. entoure une poulie, soutient le poids E, la force sera égale au poids.

Démonstration.

çon que les deux cordes soient parallèles, & que la poulie soit élevée avec le poids pendant le mouvement, la puissance fera à l'égard du poids comme 1 à l'égard de 2.

Démonstration.

Comme la corde est fixée au point D, & le point F suspendu au point H, la puissance est à l'égard du poids, comme AH à l'égard de AB (§. 59) : or $AH = \frac{1}{2} AB$ (§. 18). La puissance est donc la moitié du poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

98. Il s'ensuit donc que dans les *Polyspastes*, ce ne sont pas les poulies supérieures, mais les inférieures qui en augmentent l'effet.

Théorème XIV.

99. Si dans le polyspaste toutes les cordes MN, SX, QR, PO, TV sont parallèles, la puissance placée en Z est à l'égard du poids W, comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues.

Pl. II.
Fig. 24.

Démonstration.

Comme dans ce cas le poids bande également chaque corde, elles participent également à tout le poids : c'est pourquoi la puissance placée en Z n'a rien à soutenir que la partie du poids que soutient la corde MN (§. 96) ; par conséquent la puissance est au poids comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

100. Si le poids pèse 500 livres, & qu'on le divise par le nombre des cordes 5, il en résultera que la puissance est 100.

Corollaire II.

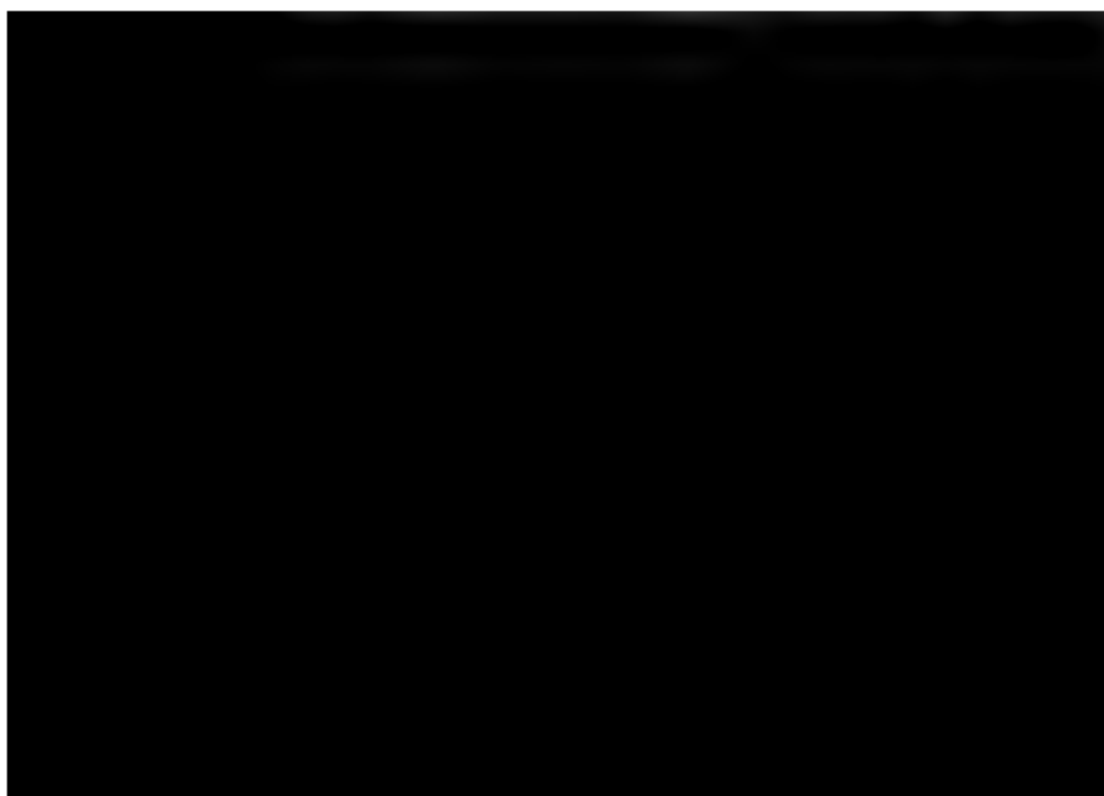
101. Si l'on multiplie la puissance 100 par le nombre des cordes 5, vous trouverez que le poids pèse 500.

Corollaire III.

102. Si vous divisez par la puissance 100 le poids 500, vous trouverez le nombre des poulies, parceque le nombre, tant des supérieures que des inférieures prises ensemble, est le même que celui des cordes.

Remarque.

103. Quelquefois, pour ne pas donner trop de hauteur au polyspaste, on ne place point les poulies l'une sur l'autre, mais à côté l'une de l'autre.

Théorème XV.

courcir d'un pied ; la puissance doit donc tirer la corde à elle en longueur d'autant de pieds que le polygraphe contient de cordes ; par conséquent l'espace qu'elle parcourt est à l'égard de celui que le poids parcourt , comme le nombre des cordes à l'égard de l'unité , c'est-à-dire , comme le poids à l'égard de la puissance morte (§. 99). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XVI.

105. Dans le coin la puissance est au poids ou à la résistance du corps qui doit être fendu , ce que la moitié de la grosseur ML est à la longueur MN . Pl. II.
Fig. 10.

Démonstration.

Le coin est composé de deux plans inclinés ; & comme c'est la même chose que le poids soit tiré par le montant du plan , ou que celui-ci soit poussé en avant sous celui-là ; & que d'ailleurs la direction de la puissance qui divise les corps par le moyen du coin revient à la longueur du coin , la puissance est au poids comme la moitié de la grosseur ML à la longueur MN (§. 83). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

106. Il s'ensuit de là que plus un coin est aigu plus il a d'effet ; parceque le rapport de ML à MN seroit bien moindre dans un coin moins aigu que dans celui qui le seroit davantage.

DÉFINITION XXV.

107. La roue directe est celle sur laquelle l'eau

tombe, & la fait tourner par sa pesanteur, en passant par-dessus.

D É F I N I T I O N X X V I.

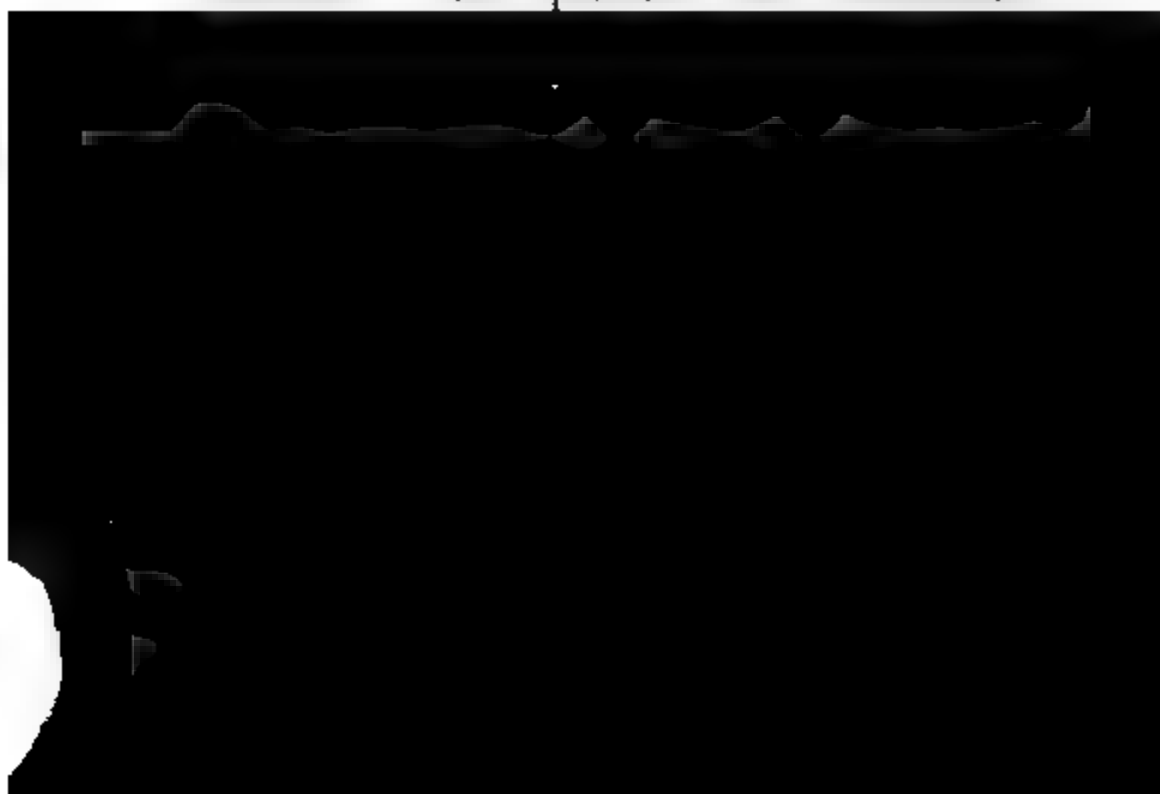
108. *La roue rétrograde* est celle qui étant suspendue sur l'eau, en reçoit un mouvement rétrogressif que l'eau lui donne en coulant par-dessous.

Corollaire I.

109. Comme il est rare, excepté dans les grandes rivières, que l'eau ait assez de rapidité pour faire tourner les roues des moulins, il faut la faire tomber de haut pour lui donner la rapidité requise & propre à faire tourner des corps pesants; d'où l'on doit conclure qu'il faut nécessairement placer la roue dans un lieu beaucoup plus bas que celui d'où l'eau coule.

Corollaire II.

110. L'eau prend sa pente successivement de lieu à autre: il faut donc, pour qu'elle acquière assez d'impétuosité, changer cette pente en précipice, & par conséquent examiner de quelle nature est cette pente, c'est-à-dire, de combien le lieu où la roue doit être placée, est plus près du centre de la terre que celui d'où l'eau coule.



terre (§. 28), il ne faut que tirer cette ligne horizontale d'un lieu à un autre, & mesurer la profondeur de celui-ci au-dessous de la ligne horizontale de l'autre.

Corollaire I I.

113. Il s'enfuit de là que pour trouver le niveau des eaux, il faut d'abord trouver la ligne horizontale.

Problème XVII.

114. Faire *un niveau*, c'est-à-dire, un instru- Pl. II.
ment par le moyen duquel on trouve la ligne ho- Fig. 25.
rizontale.

Solution.

1°. Tracez sur une planche bien polie le demi-cercle A C B D que vous diviserez en deux parties égales au point du centre C par une petite ligne D H.

2°. Placez deux crochets aux points F & E.

3°. Suspendez au centre une boule de plomb par le moyen d'un fil de soie ou autre. Si cet instrument est attaché à une corde par les crochets E, F, & que le fil de soie tombe sur la ligne D H, la corde rendue & le diamètre de l'instrument A B feront une partie de *la ligne horizontale apparente*.

Démonstration.

La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horizontale apparente (§. 41). Or le fil C D est la ligne de direction du plomb (§. 23), & se trouve perpendiculaire à la ligne A B, s'il touche la ligne D H (§. 17, 37, Géom.): donc A B est, dans ce cas, la partie de

la ligne horizontale apparente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

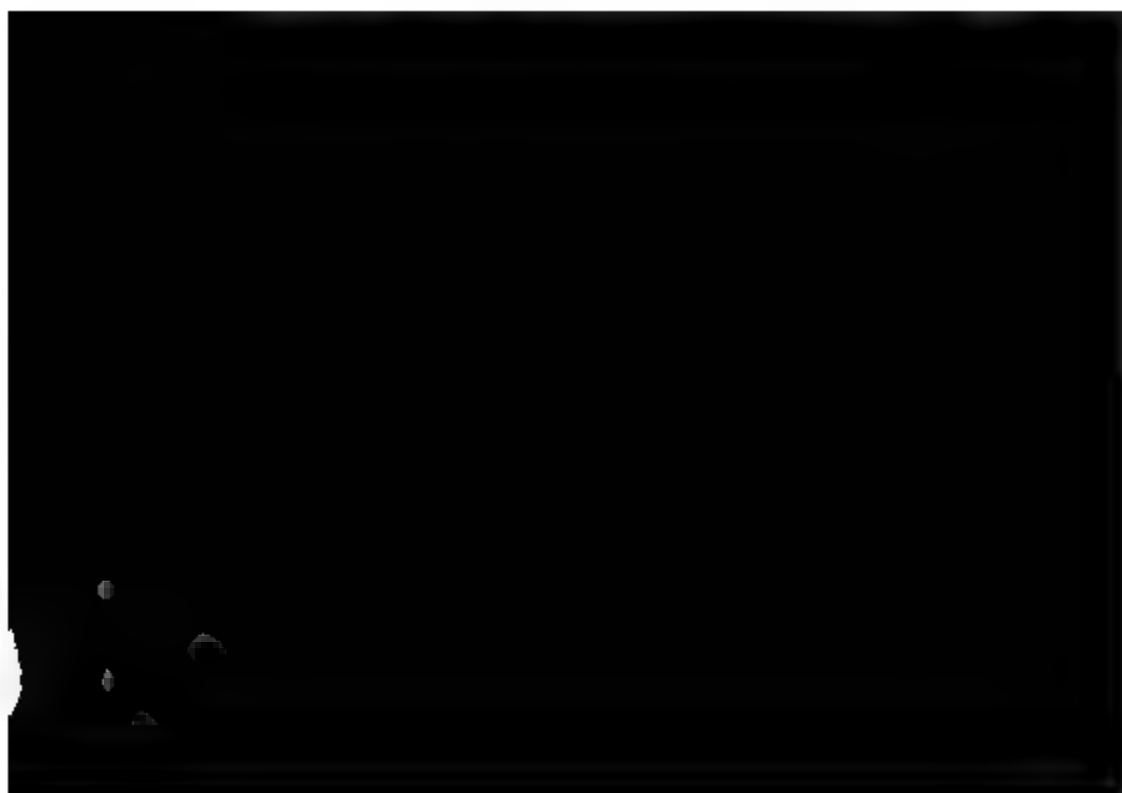
115. Riccioli (*Geogr. reſor. Lib. 6, cap. 25, f. 229*) a remarqué que cette ſorte de niveau, à moins qu'il ne ſoit extrêmement grand, peut induire en erreur pour les lieux éloignés les uns des autres, parcequ'à peine marque-t-il la différence de 5 minutes & même d'un demi-degré : ſ'il eſt auſſi trop grand, on le transporte avec peine : dans ce cas, au lieu du demi-cercle, l'on joint un ais étroit EGHF au diamètre AB, de façon qu'il faſſe un angle droit avec lui, & que le rayon CD puiſſe être prolongé juſqu'à G. On trouvera dans notre grand *Cours de Mathématique*, les autres eſpeces de niveaux qui ſont compoſés de quarts de cercle armés de pinnules.

Pl. III.
Fig. 26.

D É F I N I T I O N XXVIII.

116. *La pente des eaux* eſt une ligne droite qui indique de combien leur ſurface eſt plus éloignée du centre de la terre dans un endroit que dans un autre.

Problème XVII.



lez niveler ont au-dessus de la surface des eaux, & marquez ces hauteurs sur le papier. Pl. III.
Fig. 27.

2°. Placez le niveau sur le rivage A, & enfoncez sur l'autre B un bâton perpendiculairement à l'horizon, auquel vous attacherez un châssis quarré teint en noir, mais marqué au milieu d'un cercle blanc, ou d'une croix blanche. Qu'il soit attaché de façon qu'on puisse le fixer aux différents points de ce bâton par le moyen d'une vis.

3°. Baissez ou levez ce châssis jusqu'à ce que celui qui bornoie par les pinnules du quart de cercle apperçoive le centre de ce quarré.

4°. Cherchez depuis A jusqu'à D la hauteur de l'œil, & depuis B jusqu'à C celle du centre du châssis C.

5°. Ajoutez au premier la hauteur du rivage A, & au second celle du rivage B.

6°. Comme par cette méthode on voit clairement de combien la ligne CD, parallele à la ligne horizontale A, s'écarte dans l'un & l'autre lieu de la superficie des eaux, il ne faut que soustraire la premiere somme trouvée de l'autre : le reste sera la pente des eaux que l'on cherchoit.

On doit concevoir ici le niveau qui a été placé en P, comme placé en A, au lieu du châssis D.

EXEMPLE.

La hauteur du rivage en A 64". La hauteur du rivage en B 58".

$$\begin{array}{r} AD \ 56 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BC \ 72 \\ \hline 130 \\ 120 \\ \hline \end{array}$$

La pente 10

7°. Si d'un lieu choisi on ne peut appercevoir l'autre, on procédera par parties en divisant la distance donnée en parties que l'on nivellera séparément ; mais comme on peut rencontrer dans cet espace des endroits plus élevés que celui où l'on veut commencer à niveler, on placera le niveau EF entre deux bâtons AQ & BH, & l'on marquera séparément à gauche les hauteurs du centre du chassis D, & à droite celles du centre du chassis C.

Formez une somme des premières hauteurs ; additionnez aussi les secondes, & faites la soustraction des unes par les autres ; le reste marquera la pente des eaux. La hauteur marquée à gauche AD 34". La hauteur à droite BC 57".

BO 68.

MP 102.

La hauteur du rivage en A		La hauteur du rivage en M	
	64		58
	<hr/>		<hr/>
	166		217
			<hr/>
			166
			<hr/>

La pente — 51

On fait cette opération avec le niveau, tel que nous l'avons décrit (§. 114), en tendant des cordes par le moyen des piquets ; & dans ce cas on n'a pas besoin de chassis quarrés.



FL ; car si on les ajustoit à angles droits, le vent ne les feroit pas tourner. Les mieux adaptés sont ceux qui coupent l'axe à l'angle de 54 degrés , parce-qu'alors le vent a beaucoup de force pour les faire tourner.

2°. Comme il faut que les volants regardent le vent , toute la machine doit tourner autour de l'axe K , afin que par le moyen du levier PQ attaché à la tourette on puisse tourner la machine du côté qu'on voudra.

Autre façon de Moulin à vent.

1°. Elevez une tour en pierre jusqu'au toit , Pl. III. qui ne doit pas être fixé de façon qu'il ne puisse Fig. 29. tourner.

2°. Faites passer par le toit un cylindre , auquel soient attachés quatre volants , tels que nous les avons dépeints ci-dessus.

3°. Attachez fixement à ce toit une poutre qui sorte en dehors jusqu'à B. Ajoutez-en une autre AB au bout de la première , de façon qu'elle descende directement jusqu'à la plate-forme bâtie autour du moulin.

4°. Joignez encore celle dont nous venons de parler à une autre AC , qui doit être aussi fermement attachée au toit au dessus de C.

5°. Plantez des crochets de fer d'espace en espace sur la plate-forme ; puis ayant ajusté un cable au bout de ces solives A , vous le ferez passer par un de ces crochets , & par le moyen d'un cabestan mobile vous ferez tourner le toit.

Remarque.

119. On se sert des moulins de la première
Tome I. Y

forte en Allemagne & en diverses provinces de France ; les Hollandois emploient communément la seconde qui est aussi beaucoup en usage dans la Saintonge & le Poitou. Pour pouvoir faire tourner commodément le toit de ces derniers , on fixe un anneau de fer cannelé tout autour du haut de la tourette , au fond duquel on infere d'espace en espace des poulies de laiton , dont une partie de la circonférence doit sortir un peu de la cannelure , sur laquelle on ajuste enfin un autre cercle de fer comme le premier , & sur ce second on élève le toit.

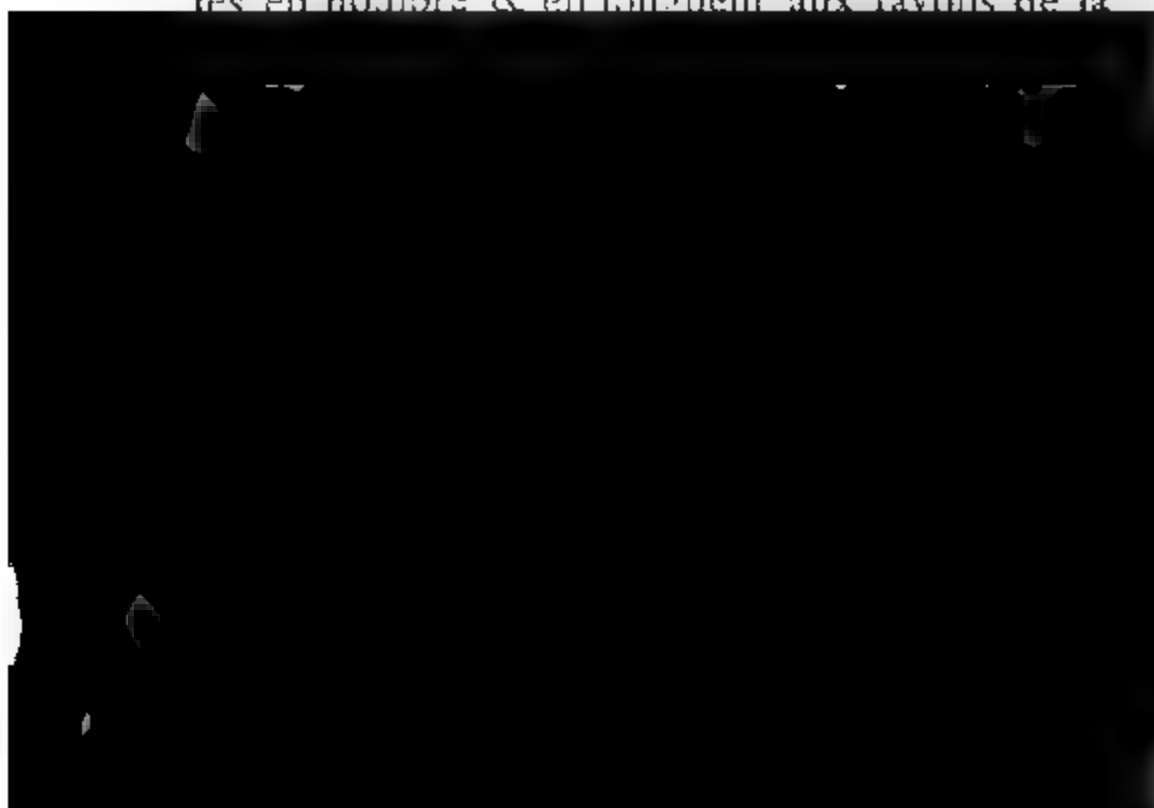
Problème XX.

120. Faire une machine qu'un cheval ou autre animal puisse faire tourner.

Solution.

1^o. Elevez verticalement un cylindre , auquel vous joindrez un timon de 7 , 8 pouces , ou davantage , selon l'exigence des cas , pour qu'un cheval puisse y être attaché.

2^o. Placez horizontalement au dessus de ce cylindre une roue étoilée un peu grande , que vous attacherez à ce cylindre par de grosses solives égales en nombre & en longueur aux rayons de la



Problème XXI.

121. Faire une machine qu'un animal puisse faire mouvoir avec les pieds.

Solution.

1°. Faites une grande roue garnie de traverses, telles que les ont les *roues directes*.

2°. Enfermez l'animal dans une étable bâtie au-dessus, & dont le plancher doit être percé, afin que l'animal appuie ses pieds de derrière sur les traverses.

3°. L'animal appuyant ses pieds sur une traverse, la pousse en arrière, & se trouve obligé de mettre les pieds sur la traverse suivante; ainsi la roue est toujours en mouvement.

Remarque.

122. S'il ne s'agit que de faire tourner une broche, ou tel autre poids peu pesant, au lieu de traverses, la roue doit être garnie en devant avec des ais minces: on y enferme un chien dressé pour cela qui la fera tourner. C'est un tambour de tournebroche.

Problème XXII.

123. Faire une machine qu'un homme puisse mettre en mouvement en l'abaissant.

Solution.

Attachez à un cylindre placé horizontalement Pl. III. plusieurs bras qui passent par le centre de l'axe: si Fig. 30. vous les baissez successivement avec la main, le cylindre tournera sur son axe.

Problème XXIII.

124. Mouvoir une machine en la tournant.

Solution.

- Pl. III. Adaptez à un cylindre une manivelle ou un rectangle ABCD, tel que celui qui est dépeint à la figure 31, ou courbé en arc de cercle EFG comme à la figure 32; par le moyen de ces manivelles vous tournerez le cylindre.

Problème XXIV.

125. Mouvoir une machine en tirant.

Solution.

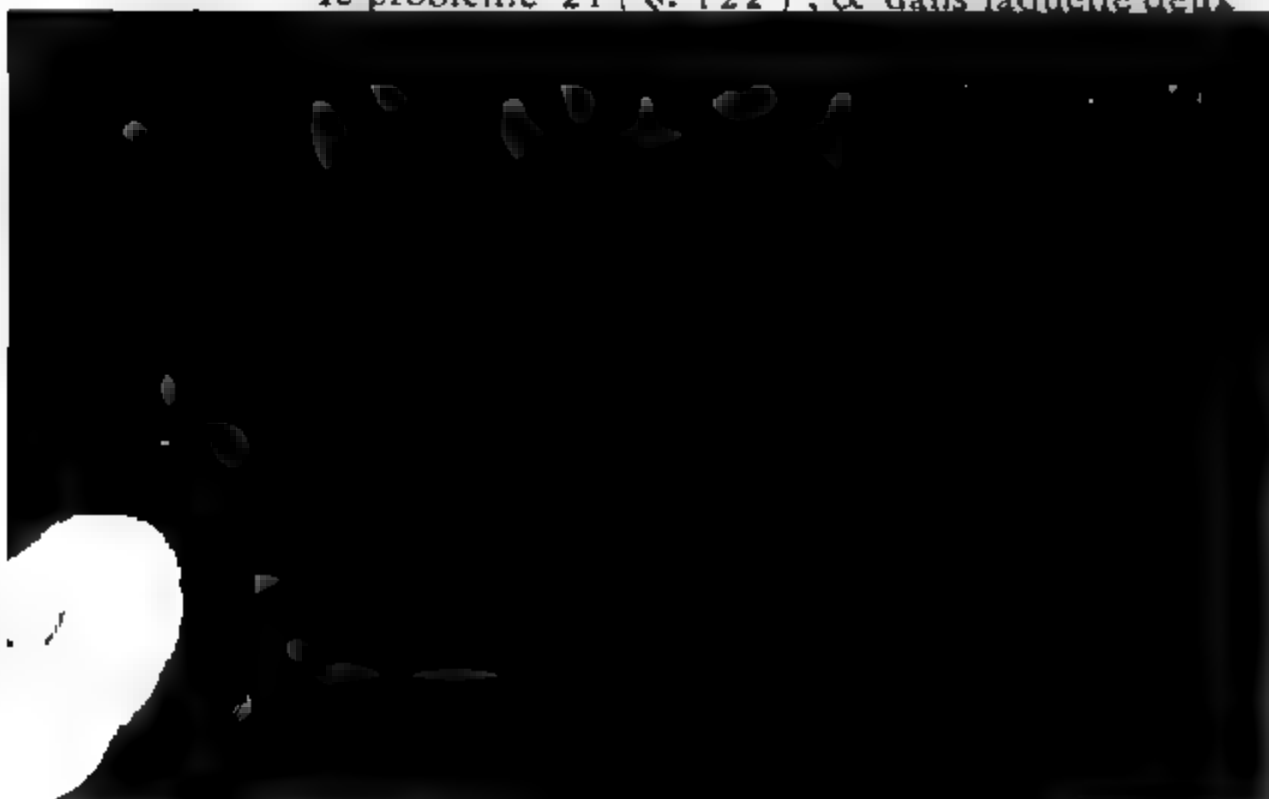
- Pl. I. On le fait par le moyen d'un treuil ou cabestan
Fig. 3. FGIH.

Problème XXV.

126. Mouvoir une machine en la foulant avec les pieds.

Solution.

Faites une grande roue de la même forme que celle dont nous avons parlé dans la remarque sur le problème 21 (§. 122), & dans laquelle deux



verge ou corde EH attachée à la manivelle BL.

Si vous posez le pied au point G, le levier baissera : il s'élèvera au contraire lorsque vous leverez le pied ; & ainsi le cylindre tournera.

Corollaire.

127. Comme, dans le dernier cas, le poids que nous devons supposer placé au point H est plus éloigné du centre du mouvement que le pied posé au point G, la force doit être plus grande que le poids qui doit être mis en mouvement (§. 59) : aussi ne se sert-on de cette façon de mettre en mouvement qu'à l'égard des poids qui ne sont point considérables. On peut cependant avec moins de force mouvoir le levier, en appliquant la verge ou corde en G & la main en H.

Problème XXVI.

128. Faire une machine qui puisse se mouvoir par le moyen d'un poids qui descend.

Solution.

1°. Entortillez une corde à un cylindre LM placé horizontalement. Pl. III.
Fig. 35.

2°. Faites-la passer autour de la poulie G attachée au plancher, ou à un autre endroit élevé.

3°. Attachez enfin un poids P à son extrémité ; le poids que sa pesanteur fait descendre développe la corde & fait tourner le cylindre.

Corollaire I.

129. Plus l'endroit d'où le poids descend est élevé, plus la corde se développe lentement &

plus le mouvement dure , (car dans ce cas elle est plus longue).

Corollaire 11.

130. Veut-on faire durer le mouvement plus long-temps , qu'on fasse passer la corde par un polyspaste FG , auquel on suspendra le poids P. Supposons , par exemple , qu'elle passe par quatre poulies , le cylindre doit céder quatre pieds de corde avant que le poids ait descendu un pied de hauteur.

Problème XXVII.

131. Aider la force mouvante à lever un poids.

Solution.

Supposons , par exemple , que le poids qu'on veut lever est de 100 livres.

III. 1°. Attachez à ce poids E une corde que vous ferez passer par une poulie H F.

2°. Attachez à l'autre bout de cette corde le poids D , presque égal en pesanteur à celui que vous devez lever.

3°. Si vous tirez la corde du côté du poids H D , il faudra peu de force pour lever l'autre

cylindrique , & vous attacherez au premier bout une chaîne ou une corde à boyau.

3^o. Comme l'élasticité est plus forte au commencement de la tension , & qu'elle tire avec moins de force sur sa fin , la fusée G L H I à laquelle est attachée la chaîne ou la corde , ne doit pas avoir la forme de cylindre , mais de cône : car quoique la puissance tire avec plus de force au commencement , & plus lentement sur la fin , elle est cependant d'abord plus proche du centre du mouvement que sur la fin , & par conséquent dans le premier cas elle a moins d'efficace , & dans l'autre elle en a davantage. (§. 133.)

Remarque.

133. On a trouvé par expérience , de combien la fusée G H doit augmenter en grosseur depuis G jusques en H ; car on a jugé par la vue & par l'ouïe si une montre , qui reçoit tout son mouvement de l'élasticité , avoit ce mouvement uniforme , ou non. Et c'est avec raison que Schot (Techn. Curieuse , liv. 9 , chap. 4 , prop. 10 , page 641) veut que l'on examine aux oscillations d'un balancier , si les circonvolutions d'une roue qui se meut lentement sont d'une aussi longue durée les unes que les autres.

Problème XXX.

134. Modérer le mouvement des machines, de pl. III.
maniere qu'il soit toujours uniforme. Fig. 34.

Solution.

Il faut se servir pour cela de roues posées en équilibre MN , dont la circonférence est garnie de plomb , ou qui ont quatre poids égaux posés

Y iv

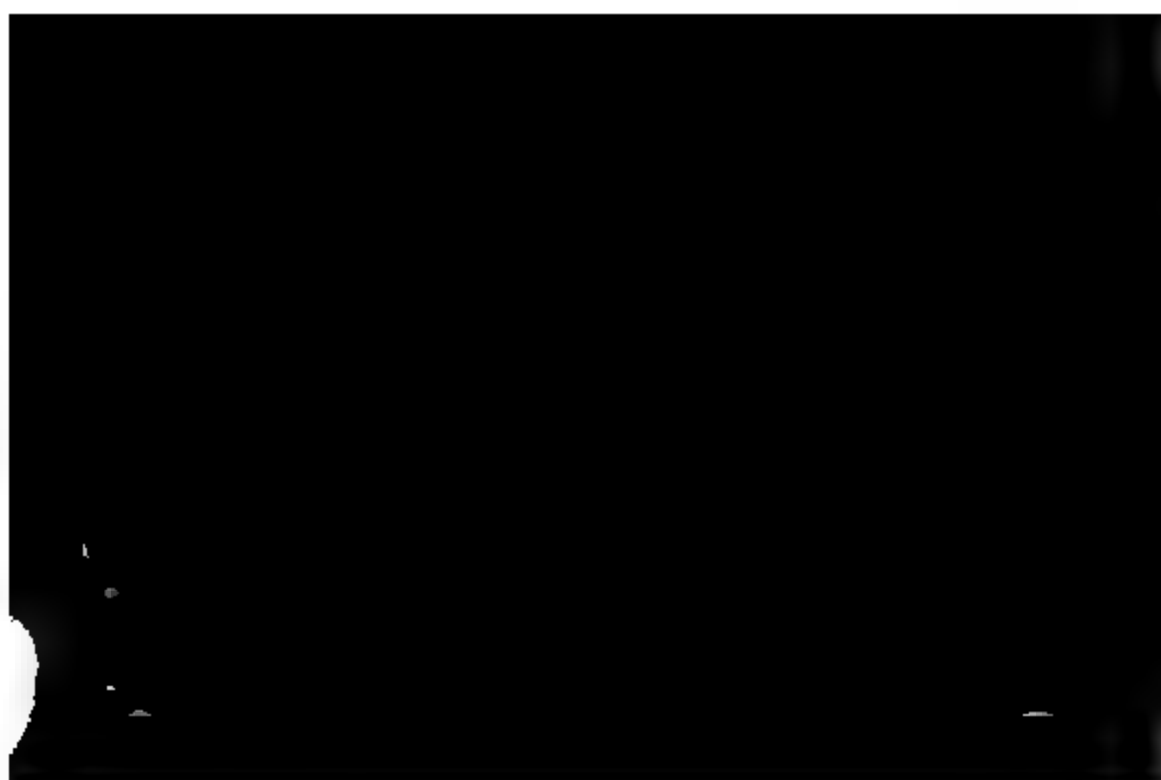
344 É L É M E N T S, &c.

à distance égale : c'est pour cette raison qu'on met les balanciers aux Automates.

Corollaire.

135. Ces roues à contrepoids sont nécessaires dans les machines que les hommes ou les animaux mettent en mouvement, pour rendre ce mouvement égal.

Fin de la Méchanique.





É L É M E N T S

D' H Y D R O S T A T I Q U E.

D É F I N I T I O N I.

1. **L'**H Y D R O S T A T I Q U E est la science de l'action des fluides sur les corps, & du rapport des pesanteurs des différents fluides.

D É F I N I T I O N I I.

2. *Le corps fluide* est celui dont les parties sont unies, de manière à pouvoir être séparées très facilement.

Remarque.

3. Cette propriété des fluides se reconnoît en ce qu'ils laissent au milieu d'eux un passage libre aux autres corps; que leur poids les fait tomber en gouttes; qu'ils prennent aussi-tôt la figure des vases dans lesquels on les verse, & que s'ils n'étoient retenus par ces vases ils s'écouleroient.

D É F I N I T I O N I I I.

4. *Les corps solides* au contraire sont ceux dont les parties sont si adhérentes les unes aux autres,

qu'elles ne peuvent être séparées que difficilement.

D É F I N I T I O N I V.

5. *Un corps spécifiquement plus léger* est celui qui sous un même volume a moins de pesanteur qu'un autre.

D É F I N I T I O N V.

6. *Un corps spécifiquement plus pesant* est au contraire celui qui sous un même volume a plus de poids qu'un autre.

Remarque.

7. Si une boule de plomb occupe le même volume qu'une boule de pierre, la boule de plomb sera plus pesante que celle de pierre : par conséquent le plomb est un corps spécifiquement plus pesant que la pierre, & la pierre au contraire est un corps spécifiquement plus léger que le plomb.

D É F I N I T I O N VI.

8. *La force de résistance* est celle qui détruit, en tout ou en partie, l'action d'une autre force.

Axiome I.

9. *Les corps graves* compriment & tâchent de déplacer ceux qui sont au-dessous d'eux. (§. 32, Méchan.)

Axiome I I.

10. Plus un corps est pesant, plus il comprime ceux qui sont au-dessous.

Axiome III.

11. Si deux ou plusieurs corps ont la même pesanteur , ils doivent comprimer également.

Axiome IV.

12. Si deux ou plusieurs corps ont la même grandeur , sans avoir la même pesanteur , celui qui a le plus de pesanteur , comprimera davantage que celui qui en a le moins.

Axiome V.

13. Si deux corps se compriment avec des forces égales , mais selon des lignes de direction opposées , il ne s'ensuivra aucun mouvement. Si l'un a plus de force que l'autre n'a de résistance , le plus foible suivra la ligne de direction du plus fort.

Lemme.

14. Si deux cylindres également grands ont cependant la hauteur & leurs bases différentes , la hauteur du premier est contenue autant de fois dans la hauteur du second , que la base de celui-ci est contenue dans la base de celui-là.

Démonstration.

Si vous multipliez les bases de deux cylindres égaux par leurs hauteurs , il en résultera le même produit (§. 197, Géom.). Si la hauteur du premier est en raison réciproque avec la hauteur du second , le produit de la base du premier par sa hauteur sera égal au produit de la base du second par sa hauteur (§. 81 , Arithm.). Par conséquent si deux cylindres sont égaux , la hauteur du premier est à la hauteur du second , ce que la base de celui-ci

est à la base de celui-là. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème I.

15. Si l'on remplit d'eau deux tubes qui se communiquent, l'eau sera à hauteur égale dans l'un & dans l'autre.

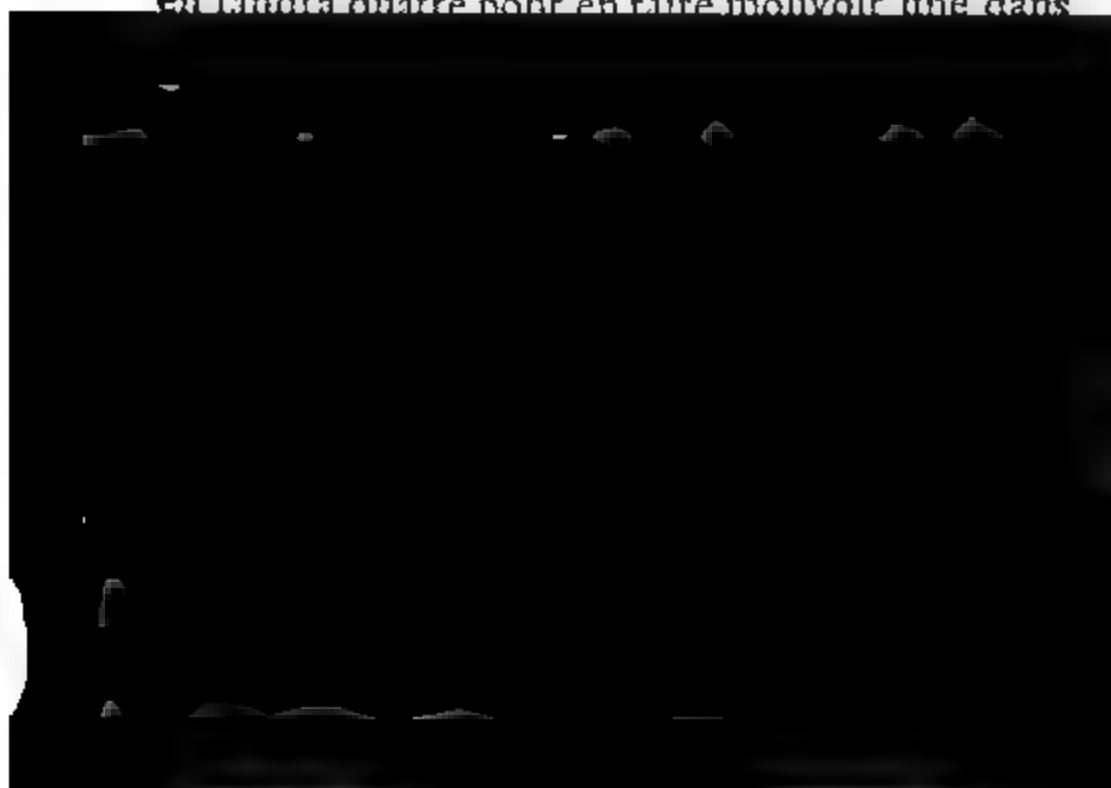
Démonstration.

Fig. 1.
1. 1.

I. CAS Si les tubes AB & CD sont à plomb sur la ligne horizontale, & que leurs diamètres soient égaux, l'eau a la même gravité dans l'un & dans l'autre, si elle a la même hauteur (§. 193, Geom); par conséquent l'eau EB fait autant d'effort pour chasser l'eau BD, que FD lui oppose de résistance (§. 9, 11); ni l'une ni l'autre ne cédera sa place (§. 13). L'eau sera donc à la même hauteur dans les deux tubes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 2.

II. CAS. Mais si la base du tube GI est quatre fois plus grande que celle du tube HK, & que l'eau descende, par exemple, d'un pouce depuis L jusqu'à O, il faut nécessairement qu'elle monte de quatre pouces dans le petit depuis M jusqu'à N (§. 14). Car supposons que dans le plus grand tube une livre en mette quatre en mouvement, il en faudra quatre pour en faire mouvoir une dans



tube R S est la même que celle d'un globe sur un plan incliné : par conséquent l'eau qui est dans le tube R S a autant de force que celle du tube T V, si l'un & l'autre sont de même hauteur (§. 82, Méchan.). Or par les raisons du premier & du second cas, l'eau qui est dans le tube T V soutient celle du tube P Q. Elle doit donc être en équilibre dans les tubes P Q & R S, si la colonne est égale. *Troisième cas qu'il falloit démontrer.*

IV. CAS. Il s'ensuit de ce que nous venons de dire, que le même équilibre de l'eau doit se trouver dans les tubes X W & Y Z, si elle monte aussi haut dans l'un que dans l'autre, quoique les tubes aient un diamètre différent, & qu'ils ne fassent point les mêmes angles avec la ligne horizontale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 4.

Corollaire I.

16. Si donc après avoir pris la précaution d'en- duire avec de la poix, ou autre matière, tout le dedans du vaisseau A B, vous y insérez un long tube par son fond supérieur C, de façon que l'eau ni l'air ne puisse pénétrer dans le vaisseau que par le tube ; & qu'ensuite vous remplissiez d'eau le tube & le vaisseau, vous verrez que le peu d'eau que renferme le tube C D pressera si fort le fond A E, qu'elle pourroit enlever un poids de cent livres, parceque l'effort que fait l'eau dans le tube C D est aussi grand qu'il le feroit dans tout le cylindre F A.

Fig. 5.

Corollaire II.

17. C'est pourquoi il ne faut regarder dans la pression des fluides que leur hauteur & la grandeur de la base qui résiste à la pression.

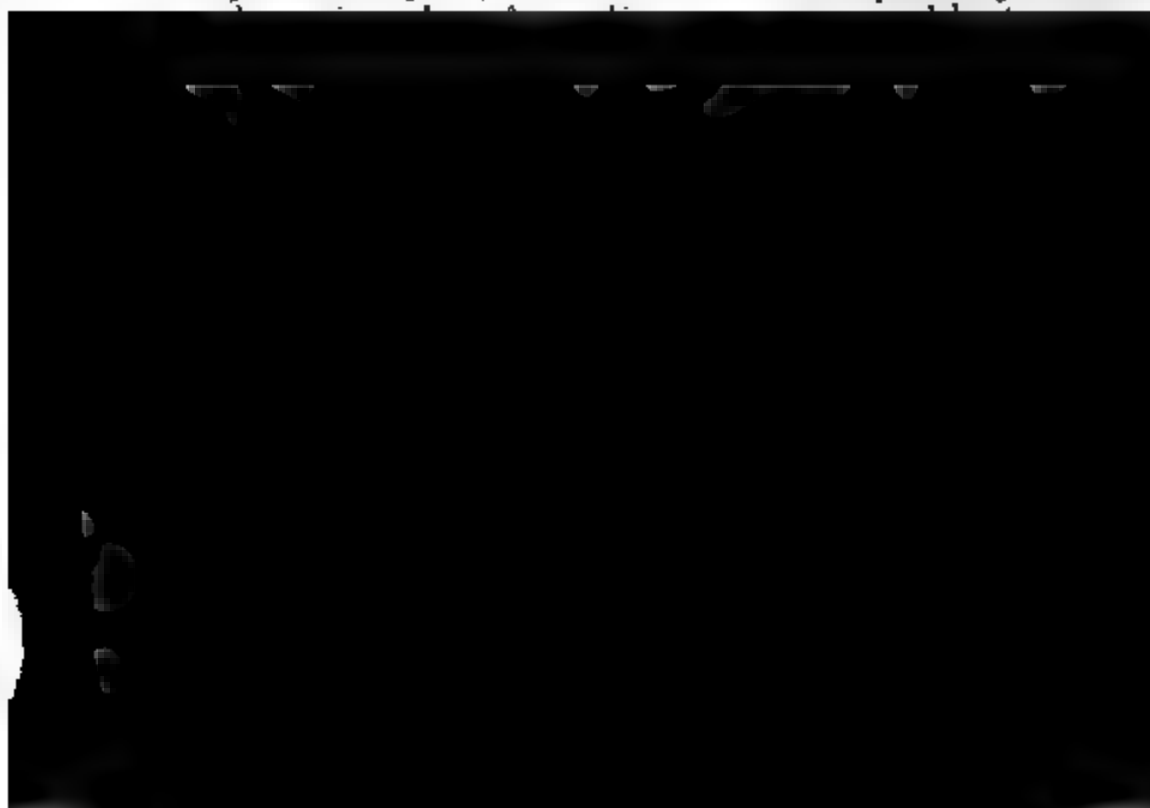
Théorème II.

Fig. 1.

18. Si l'on remplit deux tubes qui se communiquent, de liqueurs de différente pesanteur, la hauteur du fluide spécifiquement plus léger est à la hauteur du plus pesant, comme la gravité du plus pesant à la gravité du plus léger sous un même volume.

Démonstration.

Mettez, par exemple, du mercure dans le tube CD, & de l'eau dans le tube AB. Comme le mercure est quatorze fois plus pesant que l'eau, elle doit monter quatorze fois plus haut dans le tube AB que le mercure dans le tube CD: car si les tubes sont de même grandeur, les cylindres sont en même raison que leurs hauteurs (§. 110, Géom.) ; par conséquent si le mercure monte quatorze fois moins haut dans le tube CD que l'eau dans le tube AB, il y aura quatorze fois plus d'eau dans le tube AB, que de mercure dans le tube CD; par conséquent la pesanteur de l'eau sera égale à celle du mercure: c'est pourquoi comme le mercure presse autant vers DB que l'eau vers BD (§. 11), l'un & l'autre doivent être en équilibre (§. 13): & comme il n'importe que les



plus de pesanteur spécifique que lui , ce corps perd autant de son poids qu'en a le fluide dont il prend la place.

Démonstration.

Supposons , par exemple , qu'on plonge dans l'eau un pied cubique de plomb ; le pied cubique d'eau qu'il chasse étoit soutenu par celle qui l'environnoit ; or si le plomb prend sa place , il faut que l'eau qui l'environne soutienne une partie du poids égale à celle de l'eau dont il a pris la place ; par conséquent le plomb perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau. *Ce que j'avois à démontrer.*

Corollaire I.

20. Comme un pied cubique de fer perd autant qu'un pied cubique de plomb , quoique celui-ci soit plus pesant que l'autre , il est évident que le fer , & tout autre corps qui a plus de légèreté spécifique , perd dans un fluide , par exemple , dans l'eau , une plus grande partie de son poids que le plomb ou tout autre corps spécifiquement plus pesant.

Corollaire II.

21. Quoiqu'un corps qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre soit avec lui en équilibre dans l'air , le plomb , par exemple , avec le fer , ils ne le seront pourtant pas dans l'eau ou dans tout autre fluide ; mais le plomb gravitera davantage.

Corollaire III.

22. Comme un pied cubique de plomb plongé dans l'eau perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau , & que dans le vin au contraire

il n'en perd qu'autant qu'en a un pied cubique de vin, le plomb perd plus de son poids dans l'eau que dans le vin; & par conséquent tout corps perd plus de son poids dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique, que dans celui qui en a moins.

Corollaire IV.

23. De là vient que deux livres de plomb, dont on plonge l'une dans l'eau & l'autre dans le vin, ne sont point en équilibre: & en général deux corps de même espèce & de même grandeur ne sont point en équilibre si on les plonge dans des fluides de différente gravité.

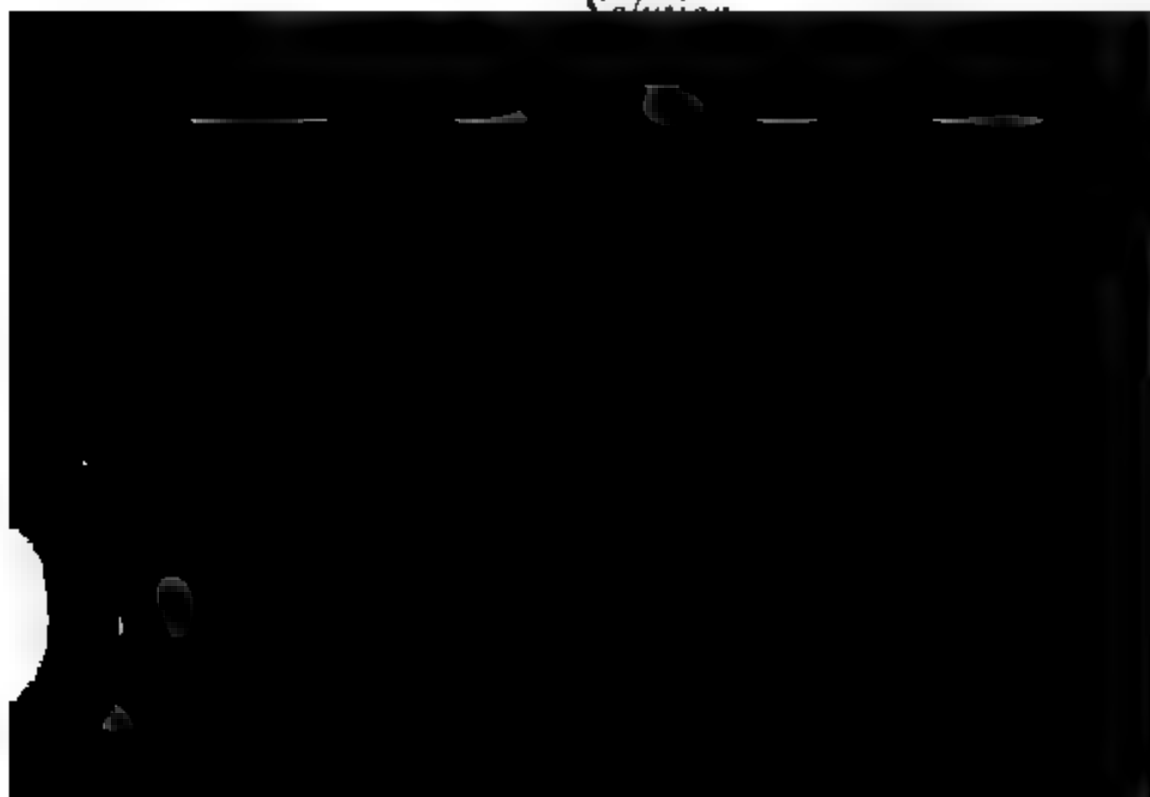
Corollaire V.

24. La pesanteur d'un fluide est à la pesanteur d'un corps de même grandeur, comme la partie du poids qu'il perd à son poids entier. Par exemple, la pesanteur de l'eau est à la pesanteur du fer, comme la partie du poids qu'il perd dans l'eau à son poids entier.

Problème I.

25. Trouver le poids de quelque fluide que ce soit, du vin, par exemple, qui est dans un tonneau.

Solution.



D'HYDROSTATIQUE. 353

régle de trois (§. 85 , Arithm.) le poids de tout le fluide.

E X E M P L E.

Un pied cubique de plomb , selon la mesure de Paris , perd dans l'eau 72 livres. On demande le poids de 345 pieds cubiques d'eau.

$$\begin{array}{r} 1' \text{ --- } 72 \text{ liv. --- } 345 \\ \phantom{1' \text{ --- } 72 \text{ liv. --- }} 72 \\ \hline \phantom{1' \text{ --- } 72 \text{ liv. --- }} 690 \\ \phantom{1' \text{ --- } 72 \text{ liv. --- }} 2415 \\ \hline \end{array}$$

Le poids de l'eau est de 24840 liv.

Corollaire.

26. Ayant déterminé le poids du fluide , vous pourrez pareillement trouver son volume. Vous demandez , par exemple , quel espace occupent 325000 liv. d'eau.

$$72 \text{ liv. --- } 1' \text{ --- } 325000 \text{ liv.}$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ 3227 \\ 47684 \\ 328666 \end{array} \quad \begin{array}{r} \hline 325000 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{I} \end{array}$$

(4513' $\frac{8}{9}$ le volume d'eau,

Problème II.

27. Trouver en quelle raison est la pesanteur d'un fluide avec la pesanteur d'un autre fluide sous un même volume.

Solution.

1°. Examinez combien un ponce cubique de

Pierre perd de son poids dans l'eau, vous connoîtrez par-là le poids d'un ponce cubique d'eau (§. 19).

2°. Examinez également combien le même ponce cubique de pierre perd de son poids dans un autre fluide, dans de l'huile, par exemple; vous connoîtrez de même le poids d'un ponce cubique d'huile (§. 19). Ainsi la pesanteur de l'eau est à la pesanteur de l'huile, comme le poids que perd un ponce cubique de pierre dans l'eau, au poids qu'il perd dans l'huile.

Par exemple, un pied cubique de pierre perd 72 livres dans l'eau & 66 dans l'huile; la pesanteur de l'eau est donc à la pesanteur de l'huile, comme 72 liv. sont à 66, ou comme 12 sont avec 11. (§. 59, Arithm.)

Problème III.

28. Connoissant le poids d'un corps composé de deux matieres, & la quantité qu'il perd de son poids dans un fluide, trouver le poids de l'une & de l'autre matiere en particulier.

Solution.

1°. Prenez séparément une livre, ou telle autre quantité de chaque matiere, & par l'expérience que vous en ferez, déterminez ce qu'elle perd de

4°. Retranchez encore le poids du corps qui a le plus de gravité spécifique, de la diminution du poids qu'a le corps mixte, pour connoître de combien la perte du poids que ce corps mixte a faite, est plus grande que celle du corps spécifiquement plus pesant.

5°. Que si vous cherchez un quatrieme nombre proportionnel à l'excès du premier, à celui du second & au poids du corps mixte (§. 85, Arith.), ce quatrieme nombre proportionnel sera le poids du corps mixte spécifiquement plus léger, lequel étant ôté du poids du corps mixte, il restera le poids du volume qui a le plus de pesanteur spécifique, & par-là vous trouverez ce que vous demandez.

EXEMPLE.

Une masse composée d'étain & de plomb, du poids de 120 liv. en perd 14 quand on la plonge dans l'eau. On demande quel est le poids du plomb, quel est celui de l'étain. L'expérience fait connoître qu'une masse d'étain de 37 liv. en perd cinq étant plongée dans l'eau, & qu'une masse de plomb de 23 liv. en perd 2 étant plongée dans le même fluide. Cela connu, vous ferez ainsi votre calcul :

$$\begin{array}{r}
 37 \text{ — } 5 \text{ — } 120 \\
 \hline
 5 \\
 600 \\
 \hline
 37 \\
 \hline
 23 \text{ — } 2 \text{ — } 120 \\
 \hline
 2 \\
 240 \\
 \hline
 23
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 600 - 240 \\
 \hline
 37
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13800 - 8880 \\
 \hline
 851
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4920 \\
 \hline
 851
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{r}
 14 - 8880 \\
 \hline
 851
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 11914 - 8880 \\
 \hline
 851
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3034 \\
 \hline
 851
 \end{array}
 \\
 4920 - 3034 - 120 \\
 41 \qquad \qquad \qquad 1 \quad (120 \\
 \times \\
 26 \\
 3034 \quad (74 \text{ livres le poids spécifique-} \\
 411 \quad \text{ment plus léger.} \\
 4 \quad | 120 \text{ poids du mixte.} \\
 \hline
 146 \text{ le poids spécifiquement} \\
 \text{plus pesant.}
 \end{array}$$

Remarque.

29. On peut résoudre de la même façon le problème qui donna naissance à l'hydrostatique, & qu'Archimede explique le premier; savoir combien l'ouvrier avoit mêlé d'argent avec l'or dont il avoit fait la couronne du Roi de Syracuse, qui pesoit 18 livres; car comme 18 liv. d'or en perdent une dans l'eau, & 18 liv. d'argent $1\frac{1}{2}$, il s'aperçut que la couronne en perdit $\frac{1}{3}$, & il décou-

Démonstration.

Ce corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du fluide dont il occupe la place (§. 19); par conséquent il ne peut descendre qu'avec la force qui lui reste, & qui est égale à la différence de son poids & de celui du fluide de même volume.

Corollaire I.

31. La force qui soutient un corps dans l'eau est égale à l'excès de gravité de ce corps au-dessus de la gravité d'un égal volume d'eau. Trente-sept livres d'étain, par exemple, plongées dans l'eau perdent cinq livres de leur poids; donc trente-deux livres d'eau peuvent soutenir trente-sept livres d'étain plongé dans ce fluide.

Remarque.

32. Connoissant la grandeur & la pesanteur d'un solide plongé dans l'eau, on peut déterminer quelle force il faudroit employer pour l'élever au-dessus de ce fluide.

Supposons que le poids d'une masse plongée est de 104500 liv. la grandeur de 340 pieds cubiques; le pied cubique d'eau de 72 liv.

340

72

680

238

24480 liv. le poids d'eau égal à la masse plongée.
104500 le poids de la masse.

80020 la force capable de soutenir la masse.

Z iij

Corollaire II.

33. C'est pourquoi le poids d'un corps solide excédant davantage le poids d'un fluide qui a plus de pesanteur spécifique & dont il a pris la place, qu'il ne feroit dans un fluide qui a moins de pesanteur, il est nécessaire qu'il s'enfonce avec plus de vitesse dans celui-ci que dans celui-là. Par exemple, une boule de plomb s'enfonce plus vite dans le vin que dans l'eau.

Théorème V.

34. Si un corps est plongé dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans ce fluide, par exemple, dans l'eau, jusqu'à ce que l'eau qui rempliroit l'espace occupé par la partie du corps plongé, soit en équilibre avec tout le corps entier.

Démonstration.

Supposons que ce corps est un cylindre de bois; concevons le fluide comme composé de plusieurs cylindres qui pesent tous également, parcequ'ils ont tous une hauteur égale (§. 15). Or si le cylindre de bois est plongé dans l'eau, le cylindre d'eau qui est sous lui doit plus presser que les col-



été chassées , parcequ'actuellement comme auparavant elles pesent autant que lui. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

35. Si vous plongez le même corps dans des fluides de différente pesanteur spécifique , il doit s'enfoncer plus avant dans celui qui est moins pesant que dans celui qui l'est davantage , par exemple , plus dans le vin que dans l'eau , parceque le vin a moins de pesanteur spécifique que l'eau , & parceque la gravité de ce corps approche moins de celle de l'eau que de celle du vin.

Corollaire II.

36. Un corps s'enfonce plus avant dans un fluide à proportion qu'il approche davantage de la gravité de ce fluide. Par exemple, un morceau de bois qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre, doit s'enfoncer davantage que celui qui en a moins.

Corollaire III.

37. Si ce corps a la même pesanteur spécifique que le fluide , de façon que , par exemple , un pied cubique de ce corps pese autant qu'un pied cubique d'eau , tout le corps s'enfonce & demeure en quelque lieu du fluide qu'on le mette.

Corollaire IV.

38. S'il n'y a que la quatrième partie de ce corps qui soit plongée, la quatrième partie d'autant d'eau pese autant que le corps tout entier : c'est pourquoi si vous prenez quatre parties d'eau, c'est-à-dire , autant qu'il en tiendrait dans l'espace que le corps occupe , leur poids est quatre fois plus

grand que celui du corps ; par conséquent la pesanteur du corps est à la pesanteur du fluide de même volume , comme la grandeur de la partie plongée à la grandeur entière de tout le corps.

Corollaire V.

39. Il s'ensuit encore de là qu'un corps spécifiquement plus léger qu'un fluide ne s'élèvera point du fond du vase où on l'aura mis , si un fluide spécifiquement plus pesant , qu'on y auroit versé , ne s'élève lui-même au-dessus de la partie du corps qui se trouve plongée , pendant qu'il nage dans le vase plein de ce fluide.

Problème IV.

40. Connoissant la pesanteur d'un pied cubique d'eau & la grandeur de la partie du solide qui est plongée , trouver le poids de tout le corps.

Solution.

Comme le poids d'un corps solide est égal au poids de l'eau qui occupe le même espace que la partie plongée (§. 34) , dites : La partie plongée d'un solide est au poids du solide entier , comme un pied cubique d'eau à sa pesanteur connue : ce que vous trouverez par la règle de trois. (§. 85 ,

E X E M P L E.

Le pied cubique d'eau est de 72 livres : la partie du corps qui est plongée est de 740 pieds cubiques.

72 liv. — 740'

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 1480 \\ 518 \\ \hline \end{array}$$

53280 l. le poids de tout le corps.

Problème V.

41. Connoissant la gravité d'un pied cubique d'eau & celle du corps solide , trouver la grandeur de la partie qui doit être plongée.

Solution.

Le poids du corps donné étant à la grandeur de la partie qui doit être plongée , comme la pesantueur d'un pied cubique d'eau est à l'égard de la grandeur du même pied cubique (§. 34) , vous trouverez encore par la regle de trois (§. 85 , Arith.) la grandeur que vous cherchez de la partie qui doit être plongée.

E X E M P L E.

Le pied cubique d'eau est de 72 liv. la pesantueur du corps de 53280 liv.

72 liv. — 1' — 53280 liv.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 53280 \end{array}$$

83280 (740' la grandeur de la partie qui doit être plongée.
7222
77

Remarque.

42. La résolution de ce Problème vous fera trouver la quantité du poids qu'un vaisseau peut porter.

Problème VI.

43. Connoissant la grandeur & la pesanteur d'un solide, par exemple, d'un morceau de bois, & la pesanteur d'un fluide spécifiquement plus pesant, par exemple, d'un pied cubique d'eau, trouver la force qui peut retenir ce corps au fond du fluide.

Solution.

Il est évident (§. 34) que cette force doit égaler l'excès du poids de l'eau qui occupe la même place que le solide, au-dessus du poids de ce solide.

1°. Cherchez donc par la règle de trois (§. 83, Arithm.) la pesanteur de l'eau qui occupe la même place que tout le solide, par la pesanteur donnée d'un pied cubique d'eau, & la grandeur du solide que vous connoissez aussi.

2°. Soustrayez ensuite le poids du solide, le reste sera la puissance que vous cherchez.

E X E M P L E.

Le pied cubique d'eau pèse 72 liv. le corps solide

Corollaire.

44. Comme le corps est poussé en haut par la même force qui pourroit le retenir au fond du fluide, on peut trouver par le même problème quelle est la force qui pousse en haut un corps plus léger que le fluide dans lequel il est. Elle est la même que dans l'exemple précédent, de 476 liv.

Théorème VI.

45. La puissance nécessaire pour enfoncer dans l'eau le vase vuide A B jusqu'à la ligne A C, ligne jusqu'à laquelle, s'il étoit rempli, il s'enfonceroit; cette puissance est égale à celle qui pourroit soutenir en l'air autant d'eau qu'il en tiendrait dans le vase jusqu'à la ligne la ligne A C. Fig. 6.

Démonstration.

La puissance ou la force qui soutient l'eau en l'air est égale à sa pesanteur; or la force qui enfonce dans l'eau le vase vuide jusqu'à la ligne A C, pèse autant que l'eau qui le remplit, puisqu'elle est supposée enfoncer le vase jusqu'à cette ligne; donc cette force égale celle qui pourroit soutenir l'eau contenue dans le vase (§. 22, Arithm.). Ce qu'il falloit démontrer.

Théorème VII.

46. La force qui est nécessaire pour retenir un corps qui a moins de pesanteur, sous un fluide qui en a d'avantage, & le poids que ce corps perd, augmentent la pesanteur du fluide, & pèsent avec lui.

Démonstration.

La force nécessaire pour retenir un corps qui a

moins de pesanteur sous un fluide qui en a davantage , grave sur le fluide , de sorte que c'est comme si une masse de même poids lui étoit ajoutée. Or cette masse ne faisant qu'un corps grave avec le fluide , peseroit avec lui ; donc une force égale à cette masse doit peser avec le fluide. Voilà le premier article.

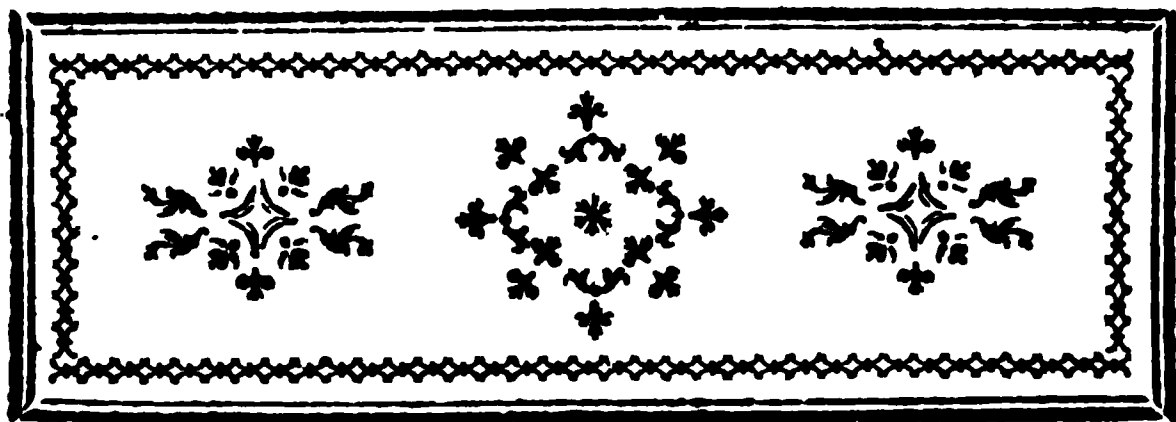
Quant au second , la partie du poids que perd dans un fluide plus léger un corps qui a plus de pesanteur , est soutenue par ce fluide , comme nous l'avons démontré dans le Théorème 3 , (§. 19). Or cette partie du poids jointe avec l'eau qui est dessus & dessous dans le même cylindre , pesant autant que l'eau qui l'entourne , il est nécessaire qu'elle comprime le fond du vaisseau avec cette eau , & par conséquent elle grave avec elle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

47. On prouve aisément par l'expérience ce que nous avons démontré jusqu'ici. Nous devons regarder ces expériences comme des examens qui nous prouvent la bonté , la justesse & la vérité de nos raisonnements.

Fin de l'Hydrostatique.





É L É M E N T S D' A I R O M É T R I E.

D É F I N I T I O N. I.

1. **L'**A I R O M É T R I E est la science de mesurer l'air, ou la science qui nous apprend à connoître les différents degrés de pesanteur, de ressort, de compression, de dilatation, &c. de l'air.

D É F I N I T I O N I I.

2. *Mesurer*, c'est prendre pour une unité une certaine quantité ou grandeur d'un corps, & chercher le rapport que les autres grandeurs ou quantités de même espèce ont avec celle qu'on ne considère que comme une unité.

Remarque.

3. Par exemple, je veux mesurer une piece d'étoffe, je prends une grandeur déterminée que j'appelle aune, & que je considère comme une unité : j'examine combien de fois la longueur de cette aune se trouve dans la longueur de l'étoffe. Veux-je mesurer la chaleur de l'air ? je prends pareillement un certain degré de chaleur pour une unité,

& je cherche ensuite le rapport que la chaleur entière de l'air a avec ce degré déterminé ; c'est-à-dire que j'examine combien de fois ce degré déterminé se trouve dans la chaleur entière que je veux mesurer. (§. 52 , Arithm.)

Corollaire.

Comme sous le terme de quantité est compris tout ce qui peut être augmenté ou diminué , on peut mesurer tout ce qu'on peut concevoir dans l'air , susceptible de dilatation ou de raréfaction.

D É F I N I T I O N III.

5. Par *l'air* j'entends un corps fluide répandu autour de la terre , qui occupe les espaces que les autres corps abandonnent & qui nous paroissent vuides , à moins qu'un autre corps plus fort ne l'en empêche.

Remarque.

6. Nous ne donnons ici à l'air que la propriété essentielle qui peut le faire connoître.

Corollaire.

7. Si l'on pousse la main avec célérité dans l'espace qui nous paroît vuide , & vers le visage , on sent que quelque corps le touche légèrement , quoique la main ne le touche pas. Il faut donc que ces espaces soient remplis d'une certaine matière très subtile qu'on ne voit point , & dont les parties ne sont pas assez adhérentes les unes aux autres pour empêcher le mouvement des corps. Il y a donc un fluide très subtil qui remplit sur la terre

les espaces que les autres corps abandonnent (§. 2 , Hydrost.), c'est-à-dire que l'air existe. (§. 5.)

D É F I N I T I O N I V.

8. *Un corps est comprimé* lorsque la matiere dont il est composé , est resserrée dans un plus petit espace que celui qu'elle occupoit.

D É F I N I T I O N V.

9. *Un corps se dilate* lorsque la matiere remplit un plus grand espace qu'auparavant.

Remarque.

10. La matiere propre d'un corps est celle qui pèse avec lui , qui est en mouvement avec lui , & qui dans ce mouvement va heurter contre les autres corps. Pour la matiere qui passe librement à travers un corps , nous l'appellons *matiere hétérogene* ou *étrangere*.

Problème I.

11. Faire une *Pompe pneumatique* , c'est-à-dire un instrument par le moyen duquel on puisse tirer tout l'air d'un vaisseau.

Solution.

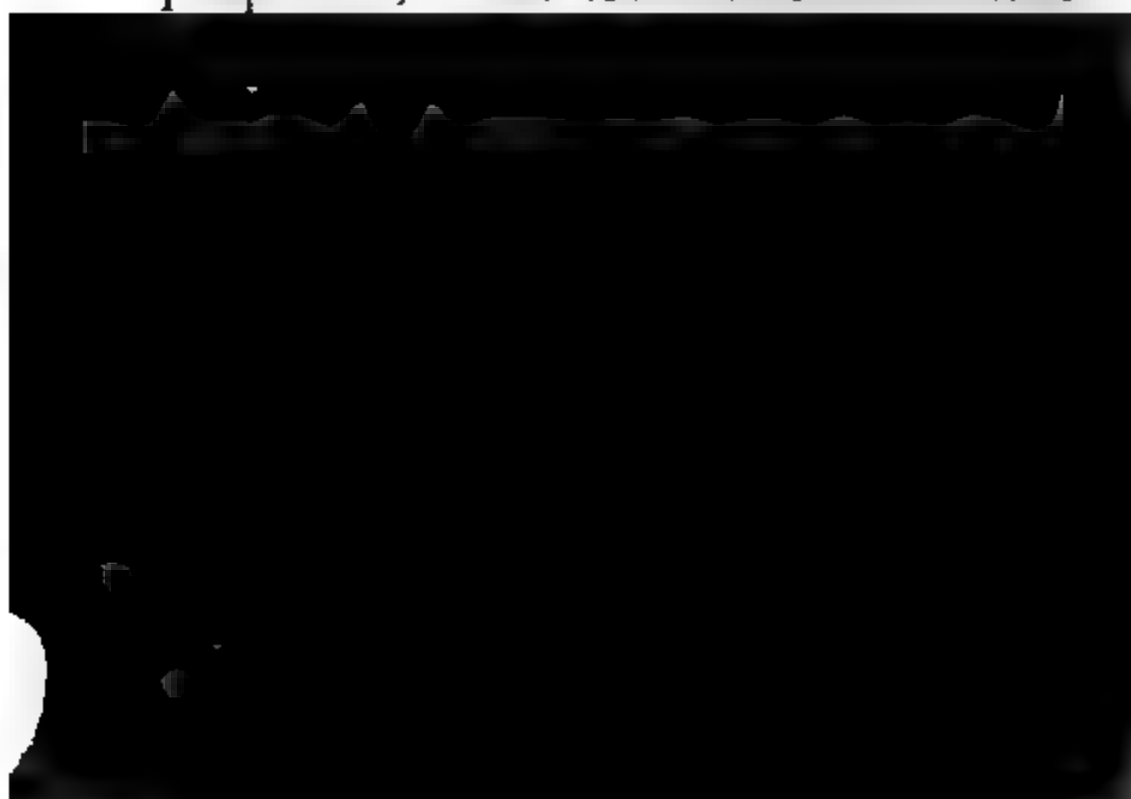
1°. Faites un cylindre creux de laiton A B , & dont la surface intérieure soit extrêmement unie , afin que le *Piston* D E la frotte exactement de toutes parts , & que la moindre partie d'air ne puisse s'échapper. Fig. 1.

2°. Le *piston* doit être composé de cercles de cuir enduits de graisse cuite de cochon, & d'huile d'olives , & renfermés entre deux autres cercles de cuivre , l'un à la partie supérieure D , & l'au-

tre à la partie inférieure E, lesquels cercles de cuivre sont retenus par une vis. Attachez ensuite au piston une lame de fer DC dentée depuis C jusqu'à D, afin que par le moyen de la manivelle NO, & d'une petite roue dentée attachée au cylindre, on puisse l'introduire & le retirer commodément. Il est bon de remarquer qu'on feroit bien de prendre à cet effet du cuir dont on fait les ceinturons des soldats, c'est-à-dire du cuir de bœuf, ou plutôt celui de cerf, étant plus souple que l'autre.

3°. Il faut souder à la base du cylindre B un petit tube BFKL, dans lequel on puisse introduire un robinet GHI au point F, afin de pouvoir ouvrir ou fermer la pompe quand on voudra. Le robinet doit être percé au milieu, pour que l'air puisse s'introduire dans la pompe après avoir passé par le petit tube LK; il doit l'être encore, mais obliquement à un de ses côtés, dans la partie supérieure, afin que l'air qui est dans la machine puisse sortir par la cavité du piston. Dans le haut est une aiguille de laiton pour fermer la cavité du robinet lorsque le cas l'exige.

4°. Enfin le tube KL doit avoir une vis au point L pour tenir fermes les vaisseaux dont on veut pomper l'air, & dont les orifices seront fermés de



ce puisse être , ne s'introduise entre le piston & la superficie intérieure du cylindre. On couvre le fond du bassin avec un cuir mouillé, parceque sans cette précaution les cloches de verre ne joindroient pas assez exactement pour empêcher l'air d'entrer. C'est pour cela qu'on garnit les tuyaux avec des cercles de cuir imbibé de suif chaud. Lorsque le piston a de la peine à entrer , il faut l'enduire d'huile d'olive , & le robinet de suif chaud.

Expérience I.

13. Si vous mettez sous une cloche de verre une vessie d'agneau toute flasque , n'ayant d'autre air que celui qui est dans les plis , & fermée avec un cordon par le col ; cette vessie s'enflera à proportion de l'air que vous tirerez de la cloche. Que si vous laissez rentrer l'air par le moyen du robinet , la vessie désenflera , deviendra flasque , & reprendra son premier état.

Corollaire.

14. Comme il ne reste dans la vessie que le peu d'air qui se trouve dans les replis , il faut que cet air se dilate à mesure qu'on pompe celui qui l'entoure (§. 9) , autrement la vessie ne s'enfleroit point. Et comme elle s'enfle à proportion qu'on pompe l'air qui l'entourne , il est clair qu'il faut qu'il y ait dans l'air une élasticité ou vertu de dilatation ; & qu'à moins qu'une puissance plus forte ne lui résiste , il aura constamment son effet.

D É F I N I T I O N V I.

15. Nous appellerons dans la suite force élasti-
Tome I. A a

que celle qui rend l'air capable de compression & de dilatation.

Corollaire.

Fig. 1. Si vous tirez le piston D E de la machine pneumatique A B, il se fait dans la cavité de cette machine un espace vuide dans lequel l'air extérieur n'a aucune entrée. Que si vous ouvrez le robinet G H, l'air qui est sous la cloche du bassin P Q se dilate & s'introduit par le tuyau L K F dans la cavité de la machine, jusqu'à ce qu'il soit également condensé par-tout. Ainsi celui qui est resté dans la cloche est plus raréfié qu'il ne l'étoit auparavant. Si après cela vous tournez le robinet G H de façon que l'ouverture oblique, qui est au-dessus, réponde à la cavité de la machine, si vous tirez l'aiguille de laiton, & que vous poussiez le piston D E dans la pompe, l'air sera chassé par le tuyau F G & par le robinet G K.

Expérience I I.

Fig. 4. 17. Attachez avec du ciment à un globe creux & d'un assez gros volume A, un tuyau de cuivre court, armé d'un robinet & d'une vis femelle B, pour qu'on puisse le fermer & l'attacher à la pompe



Corollaire I.

18. Puisque ce globe plein d'air pèse plus dans la balance que s'il étoit vuide, il est donc clair que l'air est pesant (§. 32, Méchan.)

Remarque I.

19. C'est en suivant cette méthode que Burcher de Volder a découvert qu'un pied cubique d'air pèse une once & 27 grains, ou presque 507 grains. Voyez les questions académiques sur la gravité de l'air. Thèse 48, pag. 50 & suiv.

Corollaire II.

20. L'air étant susceptible de compression, & le supérieur gravitant sur l'inférieur (§. 18, Airom. & §. 9, Hydrost.), il n'est pas surprenant que celui-là soit plus raréfié, & celui-ci plus condensé.

Corollaire III.

21. Il s'ensuit de là qu'un volume d'air inférieur a plus de pesanteur spécifique qu'un égal volume d'air supérieur, puisqu'un même espace contient plus de parties du premier que du second.

Remarque II.

22. Il n'est donc point surprenant que les vapeurs qui montent par l'air inférieur, s'attachent à l'air supérieur & demeurent suspendues. (§. 37, Hydrost.)

Théorème I.

23. La vertu élastique de l'air est égale à la force qui le comprime.

Démonstration.

L'air étant moins comprimé par une force plus petite qu'il ne l'est par une plus grande , sans doute qu'il résiste à cette force ; or l'air a une vertu élastique dont la propriété est de faire effort pour se dilater autant qu'il est possible (§. 15) ; il faut donc , pour avoir cet effet , qu'il résiste par sa vertu élastique à la force qui le comprime (§. 8 , Hydrost.) : & comme celle-ci ne peut rien de plus sur celle-là , il faut qu'elles soient égales (§. 13 , Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

24. Par conséquent plus l'air est comprimé , plus sa vertu élastique acquiert de force ; au contraire plus il est raréfié , plus elle est foible.

Corollaire II.

25. Si l'air est donc comprimé dans un espace deux fois plus étroit , sa vertu élastique devient plus forte du double. Si l'espace est trois fois plus étroit , elle est plus forte du triple , &c. qu'elle n'étoit auparavant.



Expérience III.

28. Si vous remplissez d'eau un tube dont la longueur surpasse 32 pieds du Rhin, & dont l'ouverture supérieure soit bien bouchée; & celle d'enbas fermée par un robinet; tenant après cela le tube élevé verticalement, plongez le robinet dans l'eau: si ayant ouvert l'orifice vous ouvrez aussi le robinet, toute l'eau s'écoulera; mais si vous ouvrez seulement le robinet, l'orifice étant toujours bien bouché, l'eau restera suspendue à la hauteur de 31 ou 32 pieds au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle le tuyau est plongé.

Corollaire I.

29. Puisque l'eau suspendue dans le tube comprime celle qui est dans le petit vase placé au dessous (§. 9, Hydrost.), & que cependant celle-ci ne lui cede pas, il faut donc qu'elle soit comprimée également tout à l'entour; or l'air, en s'appuyant sur l'eau, la comprime (§. 18); par conséquent l'air comprime la surface de l'eau qui environne le tube avec une force égale à celle du cylindre d'eau qui a pour base le cercle de cette surface, & 32 pieds du Rhin de hauteur. Une colonne d'air dont le diamètre est égal au diamètre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface de l'eau du vase jusqu'au haut de l'atmosphère, ne pèse donc pas plus que la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Corollaire II.

30. Puisque l'air tient l'eau suspendue dans le tube à la hauteur de 32 pieds, & que le mercure est quatorze fois plus pesant que l'eau, l'air ne

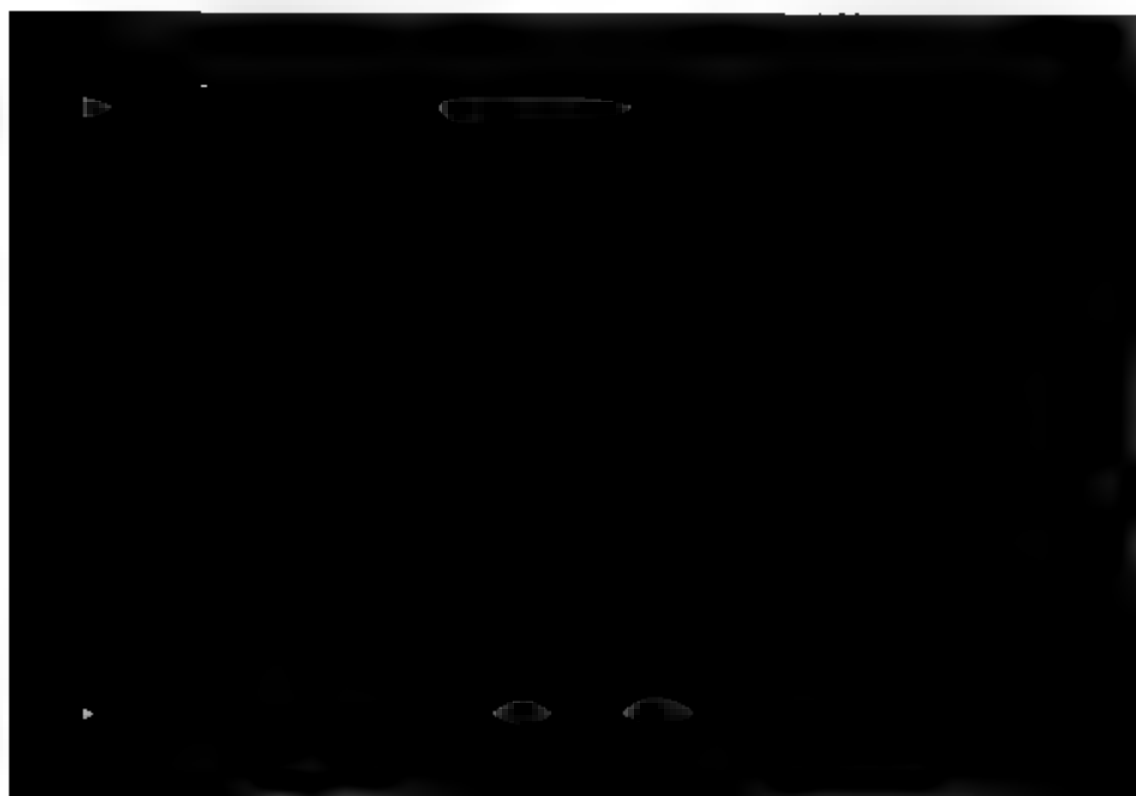
tiendra donc le mercure suspendu dans le même tube qu'à la hauteur de la quatorzième partie de 32 pieds. (§. 18, Hydrost.)

Remarque.

Fig. 31. De là vient que si vous remplissez de mercure un tube de verre A B dont l'orifice supérieur soit fermé hermétiquement, & que vous plongiez ce tube dans un vase plein de mercure, celui qui est dans le tube ne tombera pas absolument ; mais il sera suspendu à la hauteur d'environ 28 pouces. Toricelli a fait cette découverte ; c'est pourquoi on appelle ce tube, *le Tube de Toricelli*, ou *Barometre*. Que si vous jetez de l'eau dans le vase où est le mercure, il montera plus haut dans le tube, parceque l'air pèse alors avec l'eau, & leur action étant réunie, elle devient plus forte : au contraire si vous mettez ce tube sous une cloche de verre à grand col & dont vous pompez l'air, à mesure que l'air manquera, le mercure descendra.

Problème II.

32. Connoissant la base d'une colonne d'air, trouver le poids de cette colonne.



celui de la colonne d'air. (§. 85 , Arithmét.)

EXEMPLE.

Soit le diametre du cercle 100'', l'aire sera de 7850'' (§. 134 , Géom.)

La hauteur de la colonne d'eau de 3100''

785000
23550

La solidité de la colonne d'eau de 24335000''

1000'' — 72 liv. — 24335''
72

48670

170345

1752120

1752 $\frac{3}{25}$ le poids de la colonne d'air.
1752

Corollaire.

33. Si le diametre d'une sphere est 1 , la base de la colonne d'air qui tombe sur cette sphere sera un cercle dont le diametre est 1 , c'est-à-dire , le plus grand cercle d'une sphere ; par conséquent son poids est de 1752 liv. On doit remarquer que cette colonne presse également dessus & dessous. (§. 26 , 27.)

Théorème I I.

34. Si un vase est rempli d'air , il n'éprouve aucun effet de la pression de celui qui l'environne ; mais si on ôte cet air , l'effet qui s'ensuit répond à la force de l'air extérieur qui le comprime.

Démonstration.

Si l'air qui remplit le vase a la même densité que

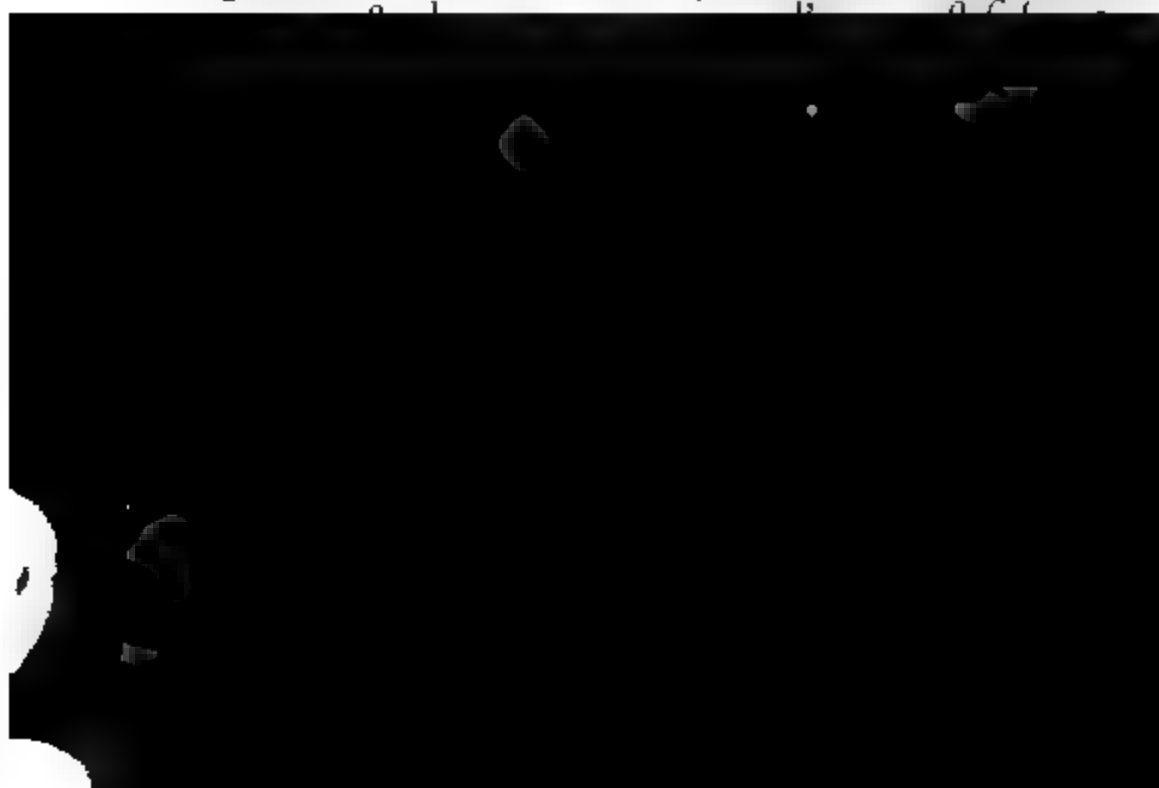
celui qui l'environne, l'élasticité de l'air renfermé est égale à la force de l'air extérieur qui le comprime (§. 13) : donc l'air renfermé dans le vase oppose autant de résistance à l'air extérieur, que celui ci fait d'effort pour le comprimer; par conséquent la pression de l'air qui environne ne se fait nullement sentir dans le vase. (§. 13, Hydrost.)

Ce qui forme la preuve du premier article.

Si l'on a pompé l'air du vase en tout ou en partie seulement (§. 11); dans le premier cas, le vase ne résiste pas à la pression de l'air extérieur; & dans le second cas, cette partie d'air qui est restée devient plus raréfiée que l'air extérieur (§. 16); par conséquent son élasticité n'a plus la même force, & elle devient comme celle d'un ressort détendu (§. 24). Or n'y ayant rien, ou presque rien, dans le vase qui résiste à la pression de l'air extérieur, il doit avoir son effet proportionné, ou à la force de tout l'air qui comprime, ou à l'excès qui l'emporte sur la résistance que peut faire l'air intérieur. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

35. Vous pouvez tirer de là la raison pourquoi une cloche de verre placée sur un disque de



l'air qu'ils contiennent ; & ainsi de mille autres effets.

Théorème III.

36. Si on laisse un peu d'air sur le mercure dans le tube de Toricelli , ce mercure demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entièrement vuide.

Démonstration.

Si l'air intérieur a la même densité que l'air extérieur , il n'est en équilibre avec lui que par la force de son élasticité (§. 23 , Airom. & 13 , Hydrost.). Le mercure commence donc à descendre par la force de sa propre gravité (§. 13 , Hydrost.). Alors l'air renfermé se dilate (§. 14) ; & en se dilatant , sa vertu élastique s'affoiblit (§. 24) ; étant ainsi raréfié , il n'est plus en équilibre avec l'air extérieur (§. 13 , Hydrost.) qui presse le mercure pour le faire remonter dans le tube ; mais alors le mercure trouvant l'air intérieur qui s'y oppose , il ne peut monter à une hauteur aussi grande que s'il ne rencontroit point d'obstacle. Par conséquent il demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entièrement vuide. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

37. Comme la gravité du mercure & l'élasticité de l'air sont ensemble en équilibre avec l'air extérieur , il restera donc dans le tube autant de mercure qu'il en faut pour suppléer à ce qui manque à l'air intérieur , afin qu'il puisse demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Corollaire II.

38. Par conséquent l'élasticité de l'air renfermé est équivalente au poids de la colonne de mercure qu'il seroit nécessaire d'ajouter pour être capable, par son propre poids, de demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Théorème IV.

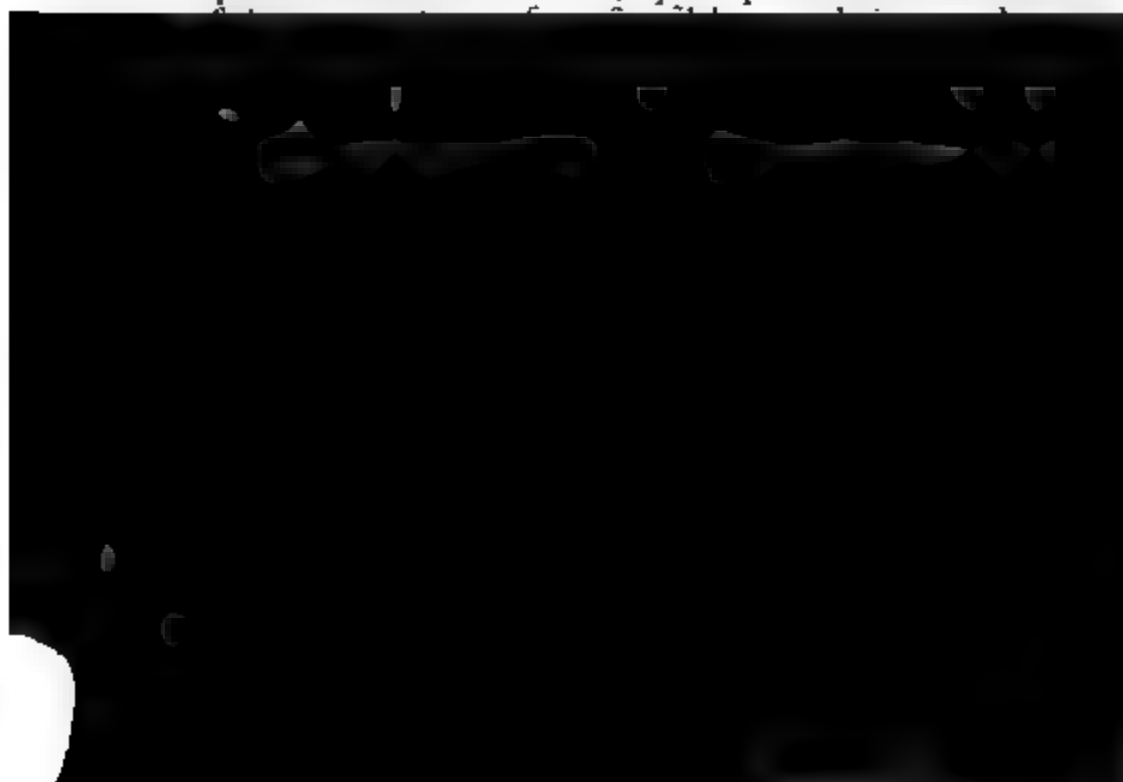
39. Si la pesanteur de l'air diminue, le mercure descend dans le tube; si la gravité de l'air augmente, le mercure doit monter.

Démonstration.

Le mercure suspendu dans le tube est en équilibre avec la pesanteur de l'air (§. 30); par conséquent si celle-ci diminue, le mercure n'étant plus tant comprimé, descendra; au contraire l'air ayant plus de gravité, le mercure doit nécessairement monter (§. 13, Hydrost.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

40. Le mercure étant tous les jours ou plus haut ou plus bas dans le tube, quoique cette variation



Problème III.

42. Comprimer l'air dans un vase par le moyen de la machine pneumatique.

Solution.

1°. Appliquez le vase AB à la machine.

Fig. 4.

2°. Tournez du côté de la cavité de la machine le trou oblique du robinet, & ôtez l'aiguille de laiton I.

Fig. 1.

3°. Tirez de la machine le piston DE : alors l'air passant par le trou du robinet & par le tuyau EB, entrera dans la machine.

4°. Tournez ensuite le robinet de façon que le tuyau FK étant ouvert, la communication entre le vase & le cylindre soit aussi ouverte, & que le point I soit bouché.

5°. Alors si vous retirez le piston DE, l'air passera de la machine dans le vase par le tuyau FKL, & il sera nécessairement comprimé (§. 8). *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

43. Pour que cette expérience se fasse avec succès, il faut que le vase soit bien affermi sur la machine, parceque l'air étant comprimé, sa vertu élastique fait beaucoup d'effort (§. 24); & il pourroit arriver que le vase étant déplacé, blesseroit quelqu'un des spectateurs, particulièrement s'il est de verre.

Expérience IV.

44. Si vous présentez devant le feu une vessie remplie d'air médiocrement, & liée bien étroi-

tement pour empêcher que l'air n'en sorte , elle se gonflera beaucoup , & pourra même se rompre avec grand bruit : mais si vous la retirez de devant le feu avant qu'elle soit rompue , elle redeviendra flasque & molle comme auparavant.

Corollaire I.

45. Comme malgré la pression de l'air extérieur, la chaleur dilate celui qui est dans la vessie (§. 9), il faut que la force qui occasionne cette dilatation (§. 15) soit plus grande que celle de la pression de l'air extérieur (§. 13, Hydrost.). Il est donc clair que la chaleur déplaie la force élastique de l'air.

Corollaire II.

46. Et puisque par l'absence de chaleur la vessie qui étoit tendue devient flasque comme auparavant , il faut donc que le froid diminue la force élastique de l'air.

Corollaire III.

fig. 2. 47. De là vient que si vous remplissez d'eau le tube de verre BC, laissant le globe AB rempli d'air, & que vous mettiez l'orifice C dans un vase plein d'eau EF, celle qui est dans le tube BC mon-



mesurer les changements du froid ou de la chaleur, & on l'a nommé *Thermometre*, ou avec plus de raison *Thermoscope*. A la place du vase on a mis le tube sur un autre globe ayant un petit trou. En effet la gravité de l'air pouvant par ses variations produire plusieurs changements (§. 29, 40), on a été obligé d'inventer différents instruments pour pouvoir connoître ces variations.

Problème IV.

49. Faire un Thermoscope par le moyen duquel on puisse connoître les changements du froid & de la chaleur de l'air.

Solution.

1°. Colorez de l'esprit de vin bien rectifié & à l'épreuve de la poudre à canon, avec des morceaux de l'écorce de la racine de curcume ou d'orcanette; la première racine lui donnera une couleur jaune, & la seconde une couleur rouge.

2°. Filtrez ensuite plusieurs fois cet esprit de vin par une feuille de papier gris, afin que les parties de ces racines ne soient point mêlées dans la liqueur.

3°. Remplissez le globe A B & le tube B C de cet esprit de vin filtré; & crainte d'en mettre trop peu, ou qu'en hiver tout l'esprit ne descende dans le globe, il seroit à propos de mettre le globe sur de la neige salée, ou sur de la glace polie, sur laquelle vous aurez jetté beaucoup de sel. Si c'est en été que vous vouliez faire un thermoscope, pour prévenir le même inconvénient, vous mettrez le globe dans de l'eau de fontaine bien fraîche, & dans laquelle vous aurez fait dissoudre beaucoup de nitre; vous l'y laisserez jusqu'à ce

Fig. 6.

que l'esprit de vin ne descende pas plus qu'il ne faut.

4°. Si l'esprit de vin montoit trop haut au-dessus du globe, il en faut verser un peu, & plonger insensiblement le globe dans de l'eau chaude, non pas tout d'un coup, car il se briseroit, mais on l'expose d'abord à la vapeur de l'eau bouillante, & quand il est échauffé on le plonge dans l'eau, & pour lors l'esprit de vin montera dans le tube & en chassera l'air. Lorsqu'il commencera à se former de petites ampoules dans l'esprit de vin, il faut retirer promptement le globe de l'eau, autrement l'esprit de vin se répandroit avant que vous vous en fussiez apperçu.

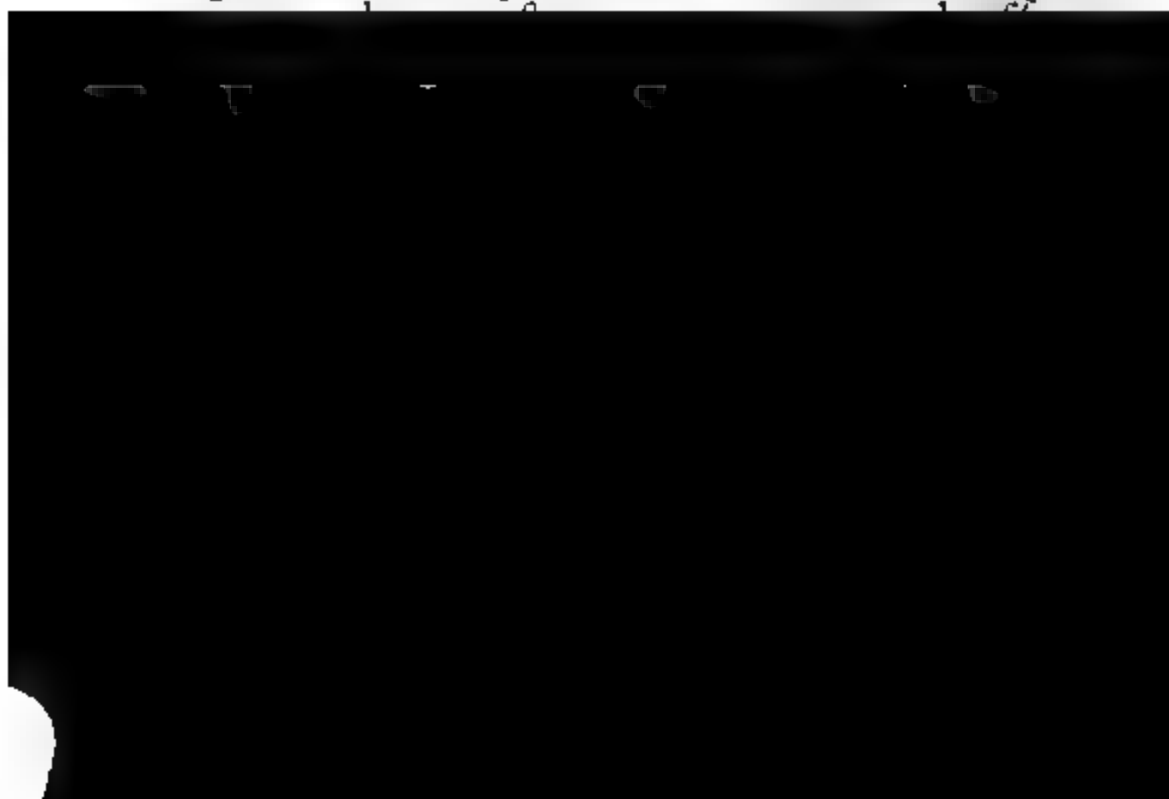
5°. Vous ferez ensuite rougir le bout du tube à la lumière d'une lampe, & vous le fermerez hermétiquement au point C.

6°. Enfin vous appliquerez le tube sur une petite planche légère sur laquelle sera collée une échelle divisée en parties égales, ce qui forme les différents degrés.

Voilà le thermoscope fait.

Démonstration.

L'expérience prouve que le froid condense l'esprit de vin, & que la chaleur le raréfie. Or par le



tube , il est constant que l'air est considérablement refroidi , & qu'il est beaucoup plus chaud , à proportion que le même esprit de vin est monté. Mais comme on ne sauroit connoître combien , par exemple , le degré de chaleur d'aujourd'hui est contenu de fois dans le degré de chaleur d'un autre jour , on ne peut pas dire dans ce sens que le thermoscope serve à mesurer la chaleur (§. 2.)

Remarque II.

§ 1. Au reste , quoiqu'on y remarque des changements très sensibles , particulièrement lorsque le tube est très menu , de façon qu'on le voit très notablement monter quand on applique la main sur le globe , & qu'il descend aussi-tôt qu'on l'en a retirée ; on a néanmoins observé qu'après être beaucoup descendu pendant le grand froid, il reste assez long-temps au même degré, quoique la température de l'air soit beaucoup adoucie.

Remarque III.

§ 2. On désigne ordinairement sur la table des degrés de deux especes, dont les uns marquent le commencement de la chaleur , & les autres le décroissement , ou le commencement du froid. On descend pour cela le thermoscope dans une chambre basse ou dans une cave , & on l'y laisse toute la nuit. Le lendemain on marque le degré d'élevation de l'esprit de vin dans le tube , au-dessus duquel degré , comme tempéré , on marque toujours en montant ceux de la chaleur , & au-dessous toujours en descendant les degrés du froid.

Fin de l'Airométrie.



É L É M E N T S D' H Y D R A U L I Q U E.

D É F I N I T I O N I.

1. **L'**HYDRAULIQUE est la science qui traite du mouvement des fluides , & plus particulièrement du mouvement des eaux.

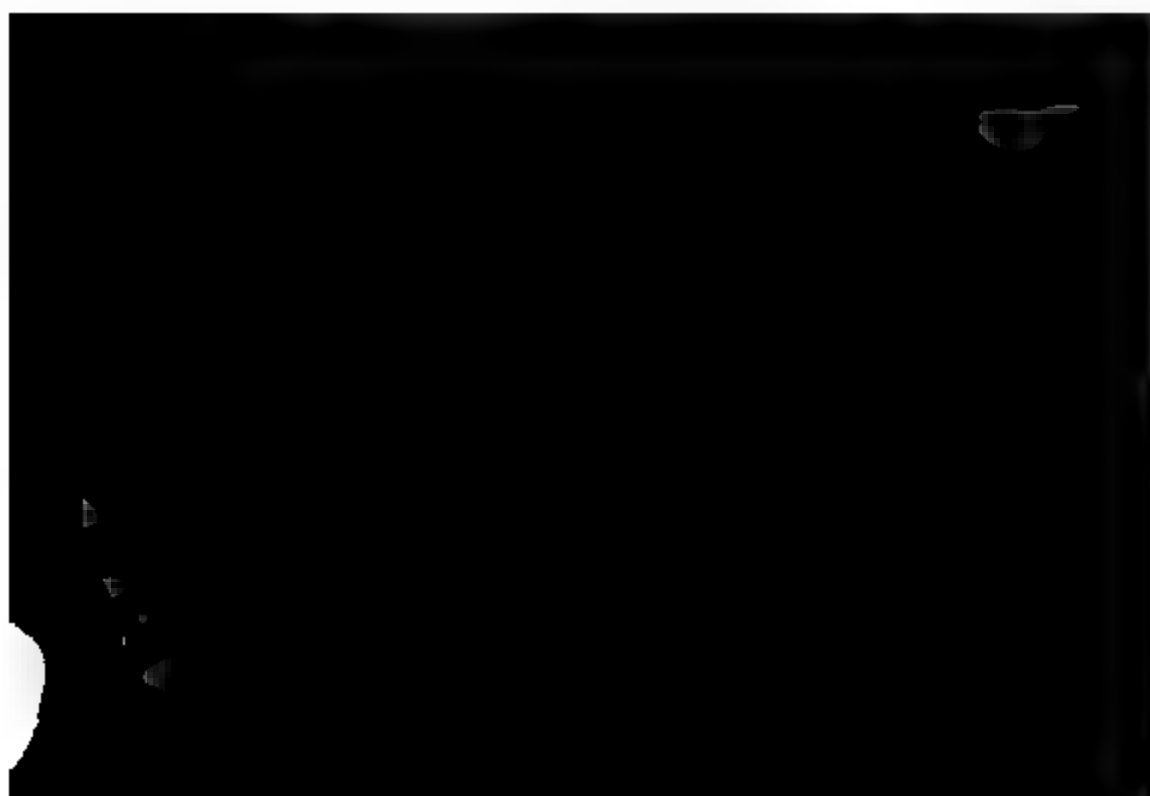
D É F I N I T I O N II.

2. Le *Tube* ou *Tuyau* est un cylindre creux.

Problème I.

3. Elever les eaux par le moyen de la vis d'Archimède.

Solution.



ron 45 degrés , & vous plongerez l'exttimité B dans l'eau que vous voudrez élever. C'est en tournant le cylindre par le moyen de la manivelle que vous ferez votre opération.

Démonstration.

En effet , si vous plongez dans l'eau l'ouverture inférieure du cylindre , l'eau par son propre poids doit couler en F , & tournant la vis , la même eau doit monter de F en G , de G en H , & ainsi par degrés jusqu'en A. *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

4. Par le moyen de cette machine on puise à la vérité beaucoup d'eau avec peu de force ; mais on ne la fait pas monter bien haut. On s'en sert fort communément pour dessécher les marais.

Problème II.

5. Faire un chapelet pour faire monter l'eau.

Solution.

1°. Plantez dans l'eau un tuyau de bois de la hauteur que vous voulez élever l'eau.

Pl. I.

Fig. 21

2°. Placez les deux cylindres GH & ED , celui-ci au fond de l'eau , & celui-là au-dessus du tuyau. Ces deux cylindres doivent être attachés à deux aissieux de fer autour desquels ils puissent tourner.

3°. Faites enfin passer autour des deux cylindres & en dedans du tuyau une corde ou une chaîne où seront attachés des globes de cuir de grosseur à pouvoir remplir la cavité du tuyau. Si l'on fait

tourner le cylindre GH, l'eau montera jusqu'en L.

Démonstration.

Le tuyau étant ouvert au point B, pour donner entrée au chapelet, l'eau y entre & monte à la hauteur de celle qui l'environne (§. 15, Hydrost.). Or si vous faites tourner le cylindre GH, celui qui est au fond de l'eau ED doit tourner pareillement, & les globes du chapelet doivent entrer dans le tuyau & en fermer l'issue à l'eau qui y est; ils la poussent en haut: par conséquent en montant eux-mêmes, ils la font monter & la poussent jusqu'en L. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème III.

6. Faire monter l'eau par le moyen de petits seaux attachés à une chaîne.

Solution.

Fig. 3.

1°. Placez horizontalement au fond de l'eau un cylindre ou prisme exagone MN qui puisse tourner autour d'un aissieu de fer.

2°. Posez au lieu jusqu'où vous devez faire monter l'eau un pareil cylindre ou prisme OP pa-



Remarque.

7. Il en coûte beaucoup pour l'entretien de la première machine, parceque les globes de cuir se gâtent facilement. Elle est d'ailleurs fort incommode en hiver, parceque les chaînes se brisent; & si l'on fait usage de cordes, elles se rompent encore plus aisément. Ce n'est pas le tout, il faut beaucoup de force pour entretenir cette machine en mouvement pendant le temps nécessaire à l'effet qu'on se propose, parcequ'il s'y fait un grand frottement des parties dont la machine est composée.

Problème IV.

8. Faire monter l'eau par le moyen du tympan.

Solution.

1°. Construisez un tympan ou tambour avec des jantes & des rayons.

2°. Placez entre les doubles rayons des petits coffrets ou boîtes, bien fermés au-dessus, & percés de petits trous dans l'autre côté A, afin que l'eau puisse y entrer. Fig. 47

3°. Affermissez & clouez parfaitement par un côté le fond de ces boîtes sur les jantes, & vous le laisserez avancer un peu sur l'autre côté, pour pouvoir y laisser un trou quarré par lequel l'eau puisse s'écouler. Si l'on suspend cette roue sur l'eau, de façon qu'une partie de sa circonférence y soit plongée, & qu'on la mette ensuite en mouvement, les seaux se rempliront en passant dans l'eau, & se videront quand ils auront passé le haut de la machine.

Nous ne pouvons point parler dans cet abrégé de tous les tympanes dont on se sert pour puiser l'eau. Il y en a un grand nombre que nous passons sous silence.

Problème V.

9. Faire une *pompe aspirante*, par le moyen de laquelle on puisse élever en haut l'eau d'un puits ou autre lieu bas & profond.

Solution.

Fig. 5. 1°. Plantez perpendiculairement dans l'eau un tuyau du bois A B C D.

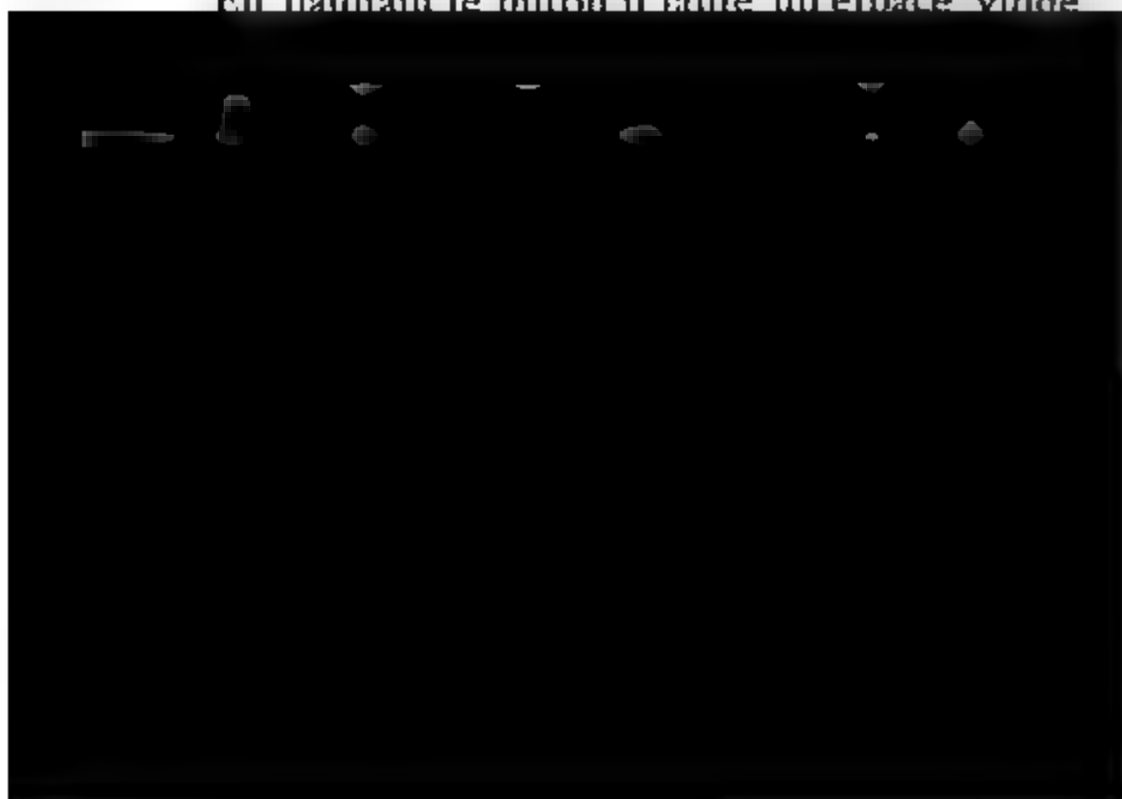
2°. Mettez au bas de ce tuyau D C une *soupape* I qui ne puisse s'ouvrir que par le haut.

3°. Attachez à la verge de fer E L le piston creux L K, qui doit être assez gros pour remplir exactement le dedans du corps du tuyau, en sorte que l'eau ne puisse point passer entre deux.

4°. Faites une autre soupape au-dessus en L. Si vous haussiez & baissiez le piston dans le tuyau, l'eau montera jusqu'au haut du tuyau.

Démonstration.

En haussant le piston il laisse un espace vuide



Remarque.

10. Les *soupapes* les plus simples sont rondes Fig. 6 & 7 & faites de cuir, on les attache par leurs anses à l'ouverture du piston. On en fait encore de cuivre couvertes d'un cuir mince, & mobiles par le moyen d'une charnière D : mais pour qu'elles se ferment plus sûrement, on met un ressort au point G.

Problème VII.

11. Faire une pompe foulante qui pousse l'eau bien haut.

Solution.

1°. Faites deux cylindres de laiton ABCD au Fig. 8. fond desquels DC vous mettrez des soupapes.

2°. Soudez à chacun un tuyau garni de soupapes en H & I qui s'ouvrent en haut.

3°. Mettez dans l'un & dans l'autre un piston K qui en remplisse exactement la cavité, pour que l'eau ne puisse passer entre deux.

Démonstration.

Quand on hausse le piston, la soupape qui est au fond s'ouvre, & l'air extérieur pousse l'eau dans le cylindre (§. 29, Aïrom.) : mais lorsqu'on baisse le piston, la soupape L se referme, & l'eau est chassée par le tuyau qui est à côté ; elle ouvre les soupapes I H, & monte plus haut par le tuyau N.

Remarque I.

12. On peut faire encore une soupape de cette Fig. 9. façon. On fait par le moyen du tour un trou A, B b iij

en forme de cône tronqué au bas du cylindre , & l'on y place un cône tronqué de laiton travaillé au tour , & armé d'un clou ou cheville D qui l'empêche de tourner. Ou bien on perce un trou hémisphérique où l'on met un globe de laiton qui le remplisse exactement.

Remarque I I.

13. Pour faire une pompe d'où l'eau coule sans cesse & avec vitesse , on ajuste deux cylindres avec leurs pistons de manière que l'un monte quand l'autre baisse ; & par ce moyen l'eau monte sans interruption. On se sert de cette machine pour éteindre le feu dans les incendies , & pour les autres machines qui regardent les eaux.

D É F I N I T I O N I I I.

14. Par les ouvrages à eau nous entendons une machine par le moyen de laquelle on fait couler l'eau dans les lieux voisins, par exemple, dans toutes les fontaines d'une ville, comme la Samaritaine à Paris.

Problème V I I.

15. Faire un ouvrage à eau , ou un réservoir pour la distribution des eaux.



ou des petits seaux attachés à des chaînes (§. 6), ou du tympan (§. 8), ou des pompes (§. 9, 11), lesquelles machines vous appliquerez par les puissances animées ou inanimées, selon les regles de la Méchanique que nous avons données dans les *Eléments de Méchanique*, §. 109, 110, 120, & dans les suivans.

3°. Il faut ramasser l'eau dans un réservoir de plomb ou de cuivre, au fond duquel il y ait des tuyaux par lesquels elle puisse descendre.

4°. Pour que l'eau ne monte point au-dessus des bords du réservoir, il faut mettre un ou deux tuyaux presque au niveau des bords, & elle s'écoulera par les tuyaux dans le fleuve d'où on la puise.

5°. Ces tuyaux verticaux doivent être adaptés à d'autres tuyaux horizontaux ou inclinés, cachés sous la terre, & qui viennent jusqu'aux endroits où l'on veut conduire les eaux.

6°. L'eau étant enfin parvenue à l'endroit où on veut la faire couler, on doit élever des tuyaux verticaux sur les horizontaux, avec lesquels ils doivent avoir une communication; par ce moyen l'eau montera dans ces tuyaux (§. 15, Hydrost.), & vous aurez perfectionné l'ouvrage à eau. (§. 14.) *Ce qu'il falloit démontrer*

Remarque I.

16. On devroit avoir dans les maisons des canaux grands comme des puits, & mettre dans les canaux horizontaux des pistons qu'on pût ouvrir ou fermer par le moyen d'une verge de fer. On pourroit ainsi faire couler les eaux ou en arrêter le cours. Il faut avoir soin en hiver de couvrir ces tuyaux de fumier ou de paille, pour que l'eau ne se gele point.

Corollaire.

17. Comme l'expérience nous apprend que l'eau monte presque à la même hauteur d'où elle est descendue, on pourra faire des fontaines jaillissantes en élevant les eaux par la machine que nous avons décrite, & la conduisant par des canaux de cuivre ou de plomb jusqu'à la fontaine d'où elles doivent jaillir.

Remarque 11.

18. Selon les principes de l'Hydrostatique (§. 15, Hydrostat.), l'eau devrait remonter à la même hauteur précisément d'où elle étoit tombée; mais l'expérience est contraire, & nous fait voir qu'elle monte moins haut: si même le canal est trop grand à raison de la force qui comprime, elle ne jaillira point du tout & ne fera que couler. Nous ne chercherons point ici les raisons d'une telle expérience.

Problème VIII.

19. Construire, pour l'agrément, des fontaines jaillissantes qui représentent diverses figures.



& de rapidité , on peut mettre une boule creuse & fort légère de cuivre doré sur le jet qui la soutiendra perpendiculairement comme suspendue en l'air & dans un mouvement continuel , pourvu qu'elle ne soit point trop exposée au vent : on peut encore placer un entonnoir à l'ouverture du tuyau , afin que si cette boule venoit à tomber , l'eau puisse la faire remonter : c'est ainsi que l'eau jouera à la paume (pour ainsi dire) avec la boule.

2°. Si vous voulez faire jaillir l'eau de tous les côtés , il faut se servir de plusieurs petits tuyaux , que vous placerez les uns verticalement , les autres horizontalement , & les autres formeront tel angle que vous voudrez. Vous pourrez encore mettre au bout du tuyau un ajutage fait comme un hémisphère ou comme un cône fermé à sa partie supérieure , ou un cylindre percé de plusieurs petites ouvertures : par le moyen de ces machines l'eau doit se répandre de tous les côtés en forme de petits filets.

3°. On peut représenter l'arc-en-ciel en formant cet ajutage de façon que l'eau en retombe toute en petites gouttes ; car pour lors si on se place entre le soleil & la fontaine , les rayons du soleil frappant sur cette espèce de pluie , feront appercevoir les couleurs de l'arc-en-ciel. Pour réussir à faire tomber l'eau en petites gouttes , il faut la faire jaillir par une infinité de très petits trous , ou par un seul tout raboteux , ou la faire tomber sur quelque hémisphère ou toit rond , d'où elle puisse se répandre de tous les côtés.

4°. Vous pourrez enfin former une nappe d'eau , en la faisant passer par une fente étroite & polie.

On trouve dans l'*Architecture curieuse* de Böccler plusieurs autres manières d'orner les fontaines.

Problème IX.

20. Faire un vase propre à arroser les jardins.

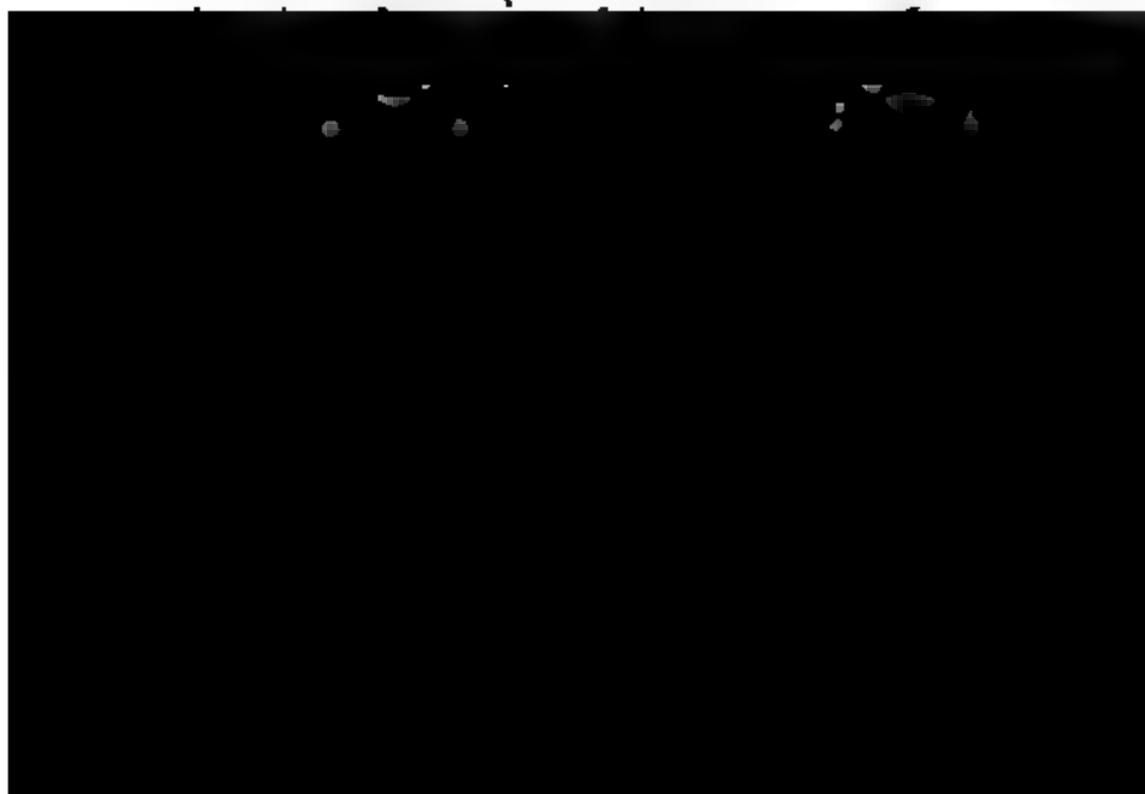
Solution.

Pl. II. 1°. Faires un vase sphérique HB, ou de telle
Fig. 10. autre figure que vous voudrez, pourvu qu'il ait
un cou un peu étroit HE, & que le fond de l'hé-
misphère soit percé de plusieurs petits trous en DB.

2°. Soudez au col du vase un tuyau E qu'on
puisse boucher avec le ponce. Je dis que si vous
plongez ce vase dans l'eau, elle entrera par les
petits trous; & si vous le retirez de l'eau, & que
vous bouchiez le petit tuyau avec le ponce, il
n'en sortira pas une seule goutte; mais enfin si
vous retirez le ponce, l'eau s'écoulera comme
une rosée par les petites ouvertures, & par con-
séquent cette machine est très utile pour arroser
les jardins.

Démonstration.

Si vous plongez le vase dans l'eau jusqu'au
tuyau ouvert en E, il se remplira par les petits
trous jusqu'à ce que l'eau qui y est entrée soit au
niveau de celle qui l'entourne (§. 15, Hydrost.):
mais si mettant le ponce sur l'ouverture E vous re-



par l'ouverture du vase étant égale à la résistance de l'air qui presse au fond (§. 15, Hydrost.), le poids de l'eau l'emportera sur la résistance, par conséquent l'eau s'écoulera par le fond du vase. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème X.

21. Faire un siphon, c'est-à-dire, une machine par le moyen de laquelle on puisse vider la liqueur d'un vase.

Solution.

Faites un vase FE dont le milieu ABCD ait la figure d'un cylindre, & dont les extrémités AFB & CED aient celle d'un cône tronqué. Que les ouvertures F & E ne soient pas plus grandes qu'il le faut pour être bouchées avec le doigt. Fig. 11.

Je dis que si vous plongez ce vase dans une liqueur il s'en remplira, quoique l'orifice supérieur soit beaucoup au-dessus; & que mettant le doigt sur l'orifice F, & retirant ce vase, la liqueur ne coulera point, mais que si vous retirez le doigt elle se répandra entièrement.

Démonstration.

C'est la même que celle du problème précédent.

Théorème I.

22. Si vous plongez dans une liqueur la branche la plus courte d'un tuyau recourbé, & que vous suçiez l'air par l'ouverture C, la liqueur montera dans la branche qui trempe dans le vase, & elle coulera autant de temps par le tuyau BC Fig. 12.



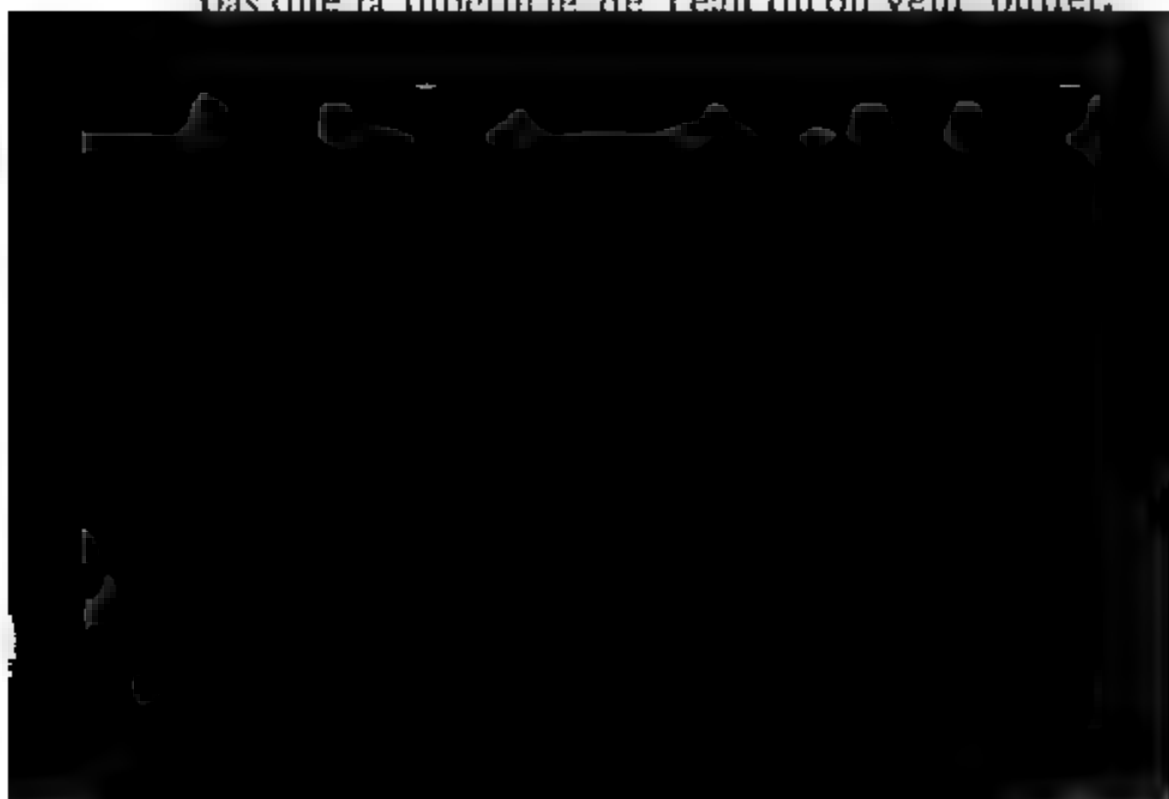
que l'ouverture A y sera plongée, & que la liqueur sera à une plus grande hauteur que l'ouverture C.

Démonstration.

Si vous sucez l'air, le siphon sera vuide ; ainsi l'air extérieur pressant l'eau qui est dans le vase (§. 18, Aïrom.), & ne trouvant aucune résistance dans le siphon, il la fera monter dans la branche AB, d'où par sa propre gravité elle descendra par la branche BC ; & comme l'air presse autant en A qu'en C, & que l'eau au contraire qui est dans la branche BC presse plus vers C que celle qui est dans la branche AB ne presse vers A, parceque la perpendiculaire de celle-là est plus grande que la perpendiculaire de celle-ci (§. 17, Hydrost.), il faut nécessairement que l'eau coule par le bout C jusqu'à ce que l'air puisse entrer par le bout A dans le siphon, & surmonter l'inégalité de la pression. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque I.

23. Il importe peu que l'une ou l'autre branche du siphon, ou même que toutes les deux branches soient recourbées, pourvu que l'orifice soit plus bas que la superficie de l'eau qu'on veut puiser.



dre jusqu'à ce que l'air puisse pénétrer par l'orifice R dans le grand tuyau. C'est pourquoi on appelle ce siphon *Diabetes*.

Problème XI.

25. Faire une fontaine intermittente, c'est à dire, une fontaine qui coule à diverses reprises.

Solution.

1°. Faites passer dans un vase rond un tuyau Fig. 14: FHM, que vous souderez au milieu du fond de ce vase, & dont les deux extrémités étant ouvertes, la première ira presque toucher le couvercle.

2°. Soudez l'orifice inférieur au bassin CD d'où l'eau puisse couler par un petit trou fait au milieu dans un vase que vous placerez au-dessous. Faites aussi un petit trou au tuyau FHM fort près du bassin.

3°. Qu'il y ait une ouverture garnie d'une vis au couvercle du vase, par où vous puissiez faire entrer l'eau, & que le fond du vase soit percé de plusieurs trous qui donnent passage à l'eau.

Si vous remplissez le vase supérieur, l'eau tombera en gouttes par les petits trous dans le bassin, & bouchant la petite ouverture M, empêchera que l'air ne puisse aller prendre sa place, & par conséquent elle cessera de couler : cependant celle qui est dans le bassin tombera dans le vase inférieur, & dès que l'ouverture inférieure du tuyau M sera dégagée, & que l'air pourra pénétrer dans le vase supérieur, l'eau recommencera à couler par les petits trous comme auparavant.

Problème XII.

26. Faire une fontaine jaillissante dans un vase de verre fermé.

Solution.

1°. Ayez une boule creuse de verre dont l'ouverture soit garnie d'une vis BE.

Fig. 15. 2°. Faites passer dans la vis un petit tube DC, ayant l'ouverture C fort petite, & celle de l'autre bout D, qui sort du verre, beaucoup plus grande.

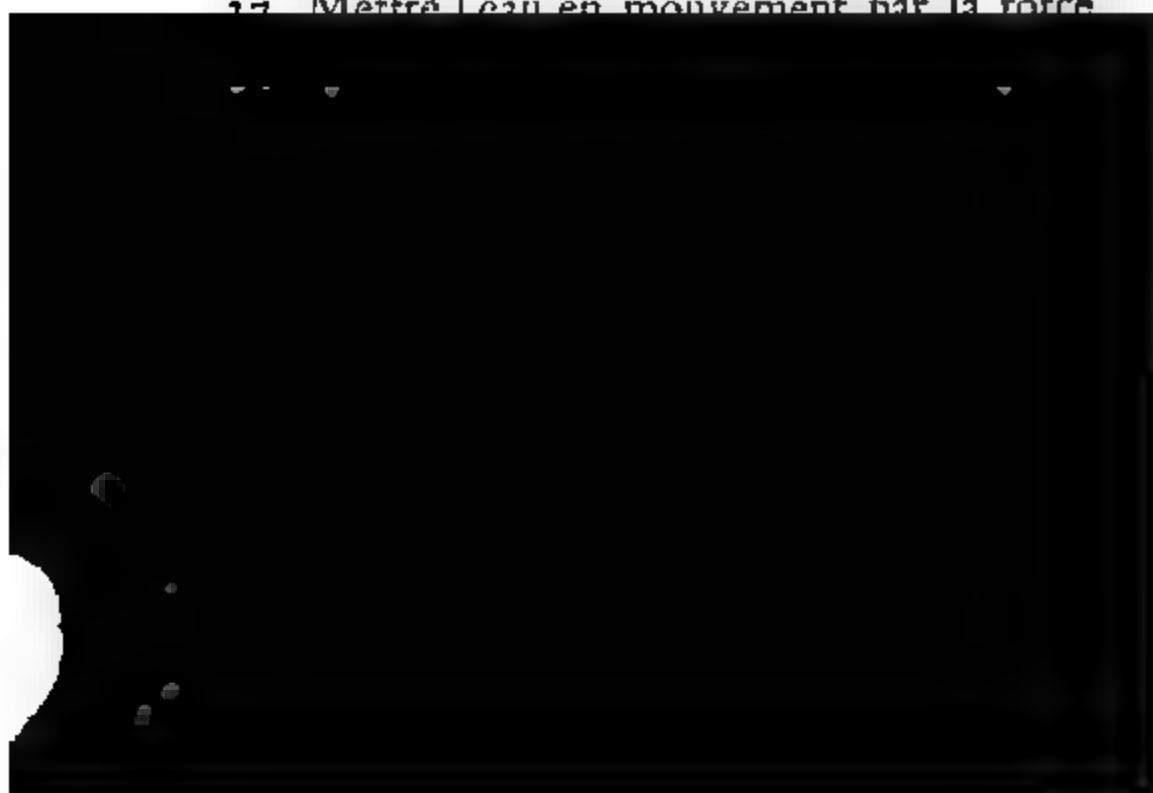
3°. Soudez à la même vis un tube EF, large vers le bout E, & menu vers F, mais long au double de l'autre.

4°. Faites une communication entre les deux vases IK & LM par le moyen du tube HN, & soudez à la base du supérieur le tube GH, dans lequel vous introduirez le tube EF, de façon qu'il descende jusqu'au vase inférieur.

Si vous remplissez d'eau le vase IK & environ le tiers du globe A, elle descendra du globe par le tube EF dans le vase LM, & montera dans la boule par le petit tube DC en jaillissant par l'ouverture C.

Problème XIII.

27. Mettre l'eau en mouvement par la force



3°. Soudez au fond du haut AB le tube FE, qui descende presque jusqu'au fond CD, & dont la partie F qui s'élève au-dessus du vase soit faite en vis, afin de pouvoir y adapter non seulement une pompe foulante, mais encore le robinet F qui doit donner ou fermer le passage à l'air & à l'eau renfermés dans le vase.

Si, le vaisseau étant ainsi préparé, vous y comprimez l'air par le moyen d'une pompe ou seringue (§. 42, Aïrom.), & qu'après l'avoir retirée vous adaptez en F le petit tube dont l'ouverture sera très petite, & qu'ensuite vous ouvriez le robinet, l'air fera sortir l'eau par le tube F avec beaucoup d'impétuosité.

Démonstration.

L'élasticité de l'air se bande extrêmement par la compression (§. 24, Aïrom.); & comme il presse infiniment plus que l'air extérieur ne résiste, il faut absolument qu'il chasse l'eau hors du vase, jusqu'à ce qu'ayant acquis une densité égale à l'air extérieur, il se trouve en équilibre avec lui. (§. 13, Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode.

Ayez un globe creux de verre double AB, à l'ou- Fig. 19.
verture A duquel vous attacherez avec du ciment un tube aussi de verre CD, dont le bout C & son ouverture seront très petits, & iront en s'élargissant un peu jusqu'au fond du globe. Si après l'avoir presque tout rempli d'eau vous comprimez l'air qui est renfermé en soufflant fortement dedans avec la bouche, dès que vous l'aurez retirée, l'eau sortira du vase comme une fontaine.

Démonstration.

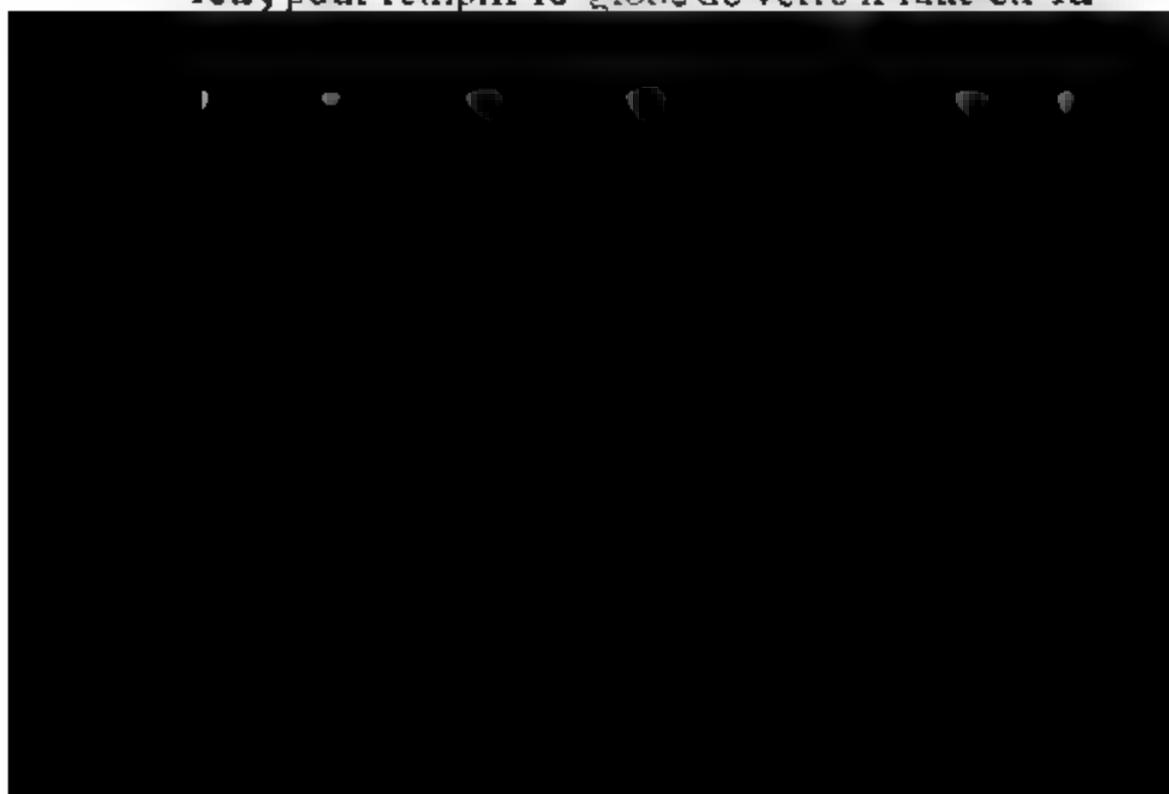
Elle est la même que la précédente.

Remarque I.

28. On peut faire le globe de cuivre au lieu de verre , & pour lors il n'est pas nécessaire de faire descendre le tube dans le globe. On nomme cette machine *éolipyle*. Pour la mettre en usage , on fait chauffer ce globe sur un réchaud ; on plonge ensuite l'orifice C dans l'eau , & peu-à-peu le globe se remplit. Lorsqu'il est presque plein on le remet sur le feu ; & quand il a acquis un certain degré de chaleur , l'air se dilatant , & trouvant l'eau qui s'oppose à sa sortie , il la chasse par l'orifice C à la hauteur d'une douzaine de pieds. Si au lieu d'eau on remplit le globe d'esprit de vin ou de fine eau-de-vie , & qu'on approche une bougie allumée de l'orifice C , pendant que l'air la fait sortir , au lieu d'un jet d'eau l'esprit de vin forme un jet de feu.

Remarque II.

29. Le verre ne pouvant résister à l'action du feu , pour remplir le globe de verre il faut en su-



qui sort est obligée de rentrer avec celle qui demeure.

Solution.

1°. Mettez l'un sur l'autre & joignez bien ensemble deux vases P R & H Q. Qu'il y ait un espace entre deux, ou qu'il n'y en ait pas, il n'importe. S'il y en a, affermissez-les l'un sur l'autre avec des colonnes bien soudées. Pl. II.
Fig. 17.

2°. Soudez au couvercle du vase supérieur (lequel couvercle doit être concave & fait en forme de bassin) le tube D L ouvert par les deux bouts, & qui descendra presque jusqu'au fond du vase inférieur H Q.

3°. Soudez au couvercle du vase inférieur le tube F M, ouvert aussi par les deux bouts, & qui montera presque jusqu'au couvercle du vase supérieur P D.

4°. Soudez enfin au milieu du couvercle du vase supérieur le tube A C, qui sera aussi ouvert par les deux bouts, mais dont l'ouverture A sera très petite, & l'autre de la largeur du tube qui doit descendre presque jusqu'au fond du vase supérieur H R.

Si, après avoir rempli d'eau le vase supérieur, vous en jetez ensuite sur son couvercle K O, l'eau commencera à jaillir par l'ouverture A, & il en sortira autant qu'il y en aura dans le vase supérieur.

Démonstration.

Pendant que l'eau du bassin K O s'insinue par le tube D L, elle chasse l'air du vase H Q, & le faisant passer par le tube F M, elle le pousse dans le vase supérieur; & parceque la pression de l'eau le

comprime, son élasticité se bande (§. 24, Airom.). Or l'air extérieur pressant avec moins de force en A que l'air renfermé dans le vase P R, il faut nécessairement que l'eau sorte par l'orifice A, & cette eau qui sort retombant sur le bassin K O, elle entre de nouveau par le tube D L, & chasse l'air du vase inférieur dans le supérieur par le tube F M. Il en jaillira donc autant qu'il s'en trouvera dans le vase supérieur, & de cette façon l'eau qui sort rentre avec celle qui demeure. *Ce qu'il falloit démontrer.*

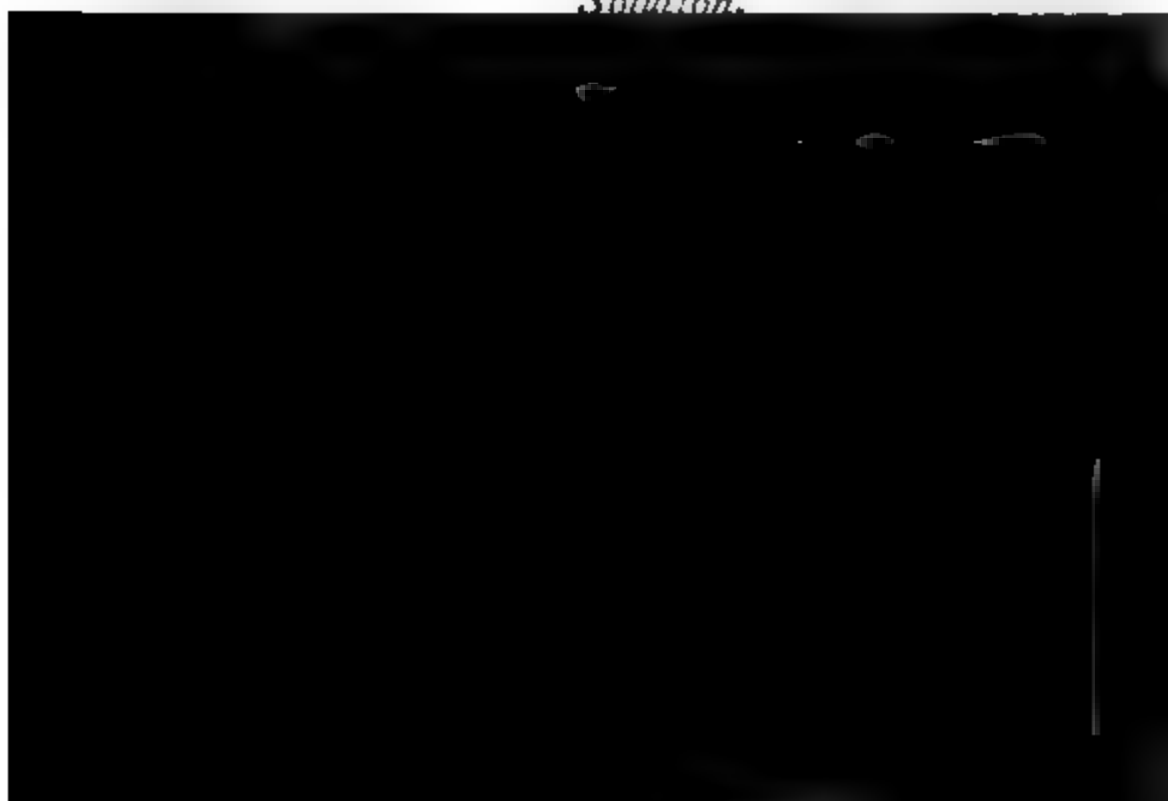
Remarque.

31. On croit que Héron d'Alexandrie fut l'inventeur de cette fontaine ingénieuse; c'est pourquoi on la nomme la *fontaine de Héron*. L'eau en sort par la même raison que nous avons rapportée dans le §. 27, excepté que dans le cas présent l'air se trouve comprimé par la pesanteur de l'eau qui s'introduit par le tube D L.

Problème XV.

32. Faire une fontaine jaillissante par le moyen de l'air raréfié par la chaleur.

Solution.



un autre tube dont l'extrémité M s'élève au-dessus du bassin , n'ayant qu'une petite ouverture , & dont l'autre bout plus ouvert descende presque jusqu'au fond du vase supérieur C D.

Si vous posez cette machine sur des charbons allumés après avoir rempli d'eau le vase supérieur, celle du vase A D sortira par l'orifice M du tube M L , & elle tombera dans le bassin G H.

Démonstration.

La chaleur, raréfiant l'air renfermé dans le vase inférieur C D E F , bande son élasticité (§. 45 , Aïrom.). Cette élasticité comprime avec plus de force l'eau renfermée dans le vase A D , que l'air extérieur ne résiste à l'orifice M ; par conséquent l'eau doit sortir par le tube L M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On ne s'est pas fort étendu sur l'Hydraulique dans cette traduction. Ceux qui voudront s'instruire parfaitement de cette partie des Mathématiques , pourront l'étudier dans le grand ouvrage de M. Belidor , intitulé , *Architecture Hydraulique* , dont la première partie , en deux volumes in-quarto , accompagnés de cent planches , renferme tout ce qu'on peut desirer sur l'art d'élever, de conduire , & de diriger les eaux pour tous les besoins de la vie.

Fin de l'Hydraulique.



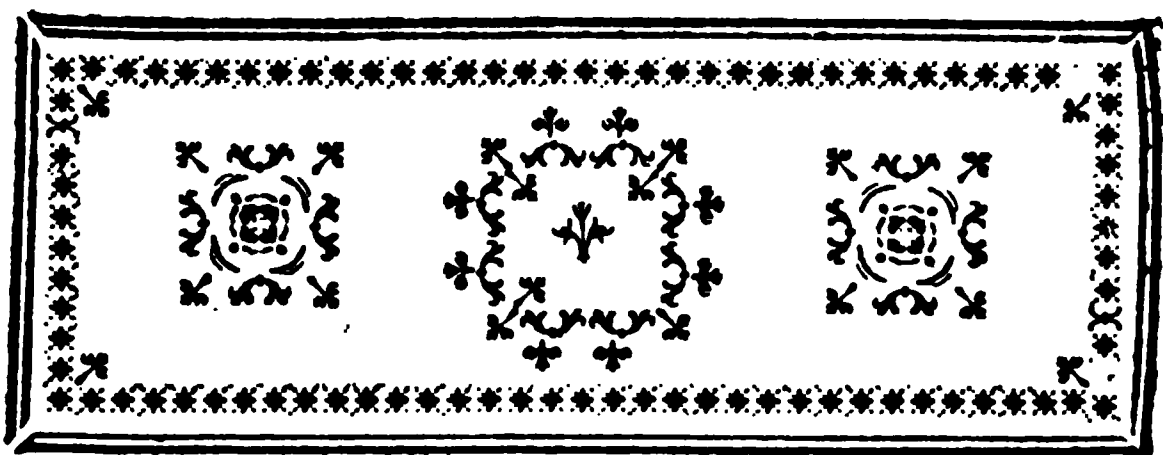
S U P P L É M E N T

A U

C A L C U L L I T T É R A L.

A V E R T I S S E M E N T.

Feu M. de Montcarville , qui a professé les Mathématiques avec succès pendant plus de quarante années , & qui a toujours été regardé avec justice comme un des meilleurs Maîtres de Paris , n'étant point content des Eléments d'Arithmétique & d'Algebre que l'on trouve dans la premiere édition de cet Abrégé , qu'il ne jugeoit pas assez étendus pour être à la portée des Commençants , s'étoit déterminé à composer ceux que l'on a mis à la tête de cette nouvelle édition : mais la mort l'ayant enlevé avant qu'il ait pu terminer ses Eléments de Calcul Littéral , nous nous sommes apperçus qu'il n'avoit donné qu'une partie de ces Eléments, & qu'il lui restoit encore à traiter ce qui regarde la nature & la résolution des Equations , tant simples que composées ainsi que les pro-



É L É M E N T S

D ' A L G E B R E.

D É F I N I T I O N I.

1. **L**ES quantités ou grandeurs desquelles on ne peut extraire exactement la racine, se nomment quantités ou grandeurs *irrationnelles* ; si ce sont des nombres, on les nomme *nombres irrationnels*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

D É F I N I T I O N I I.

2. *L'équation* est une double expression d'une quantité ou d'une grandeur par des termes différents ; comme $2 + 3 = 1 + 4$, où vous voyez que 3 ajoutés à 2 font la somme de 5, aussi bien que 4 ajoutés à 1.

Problème I.

3. Résoudre par l'algebre un problème proposé.

Règle.

1°. Distinguez les grandeurs ou quantités proposées & connues de celles que vous cherchez ;

C c iiij

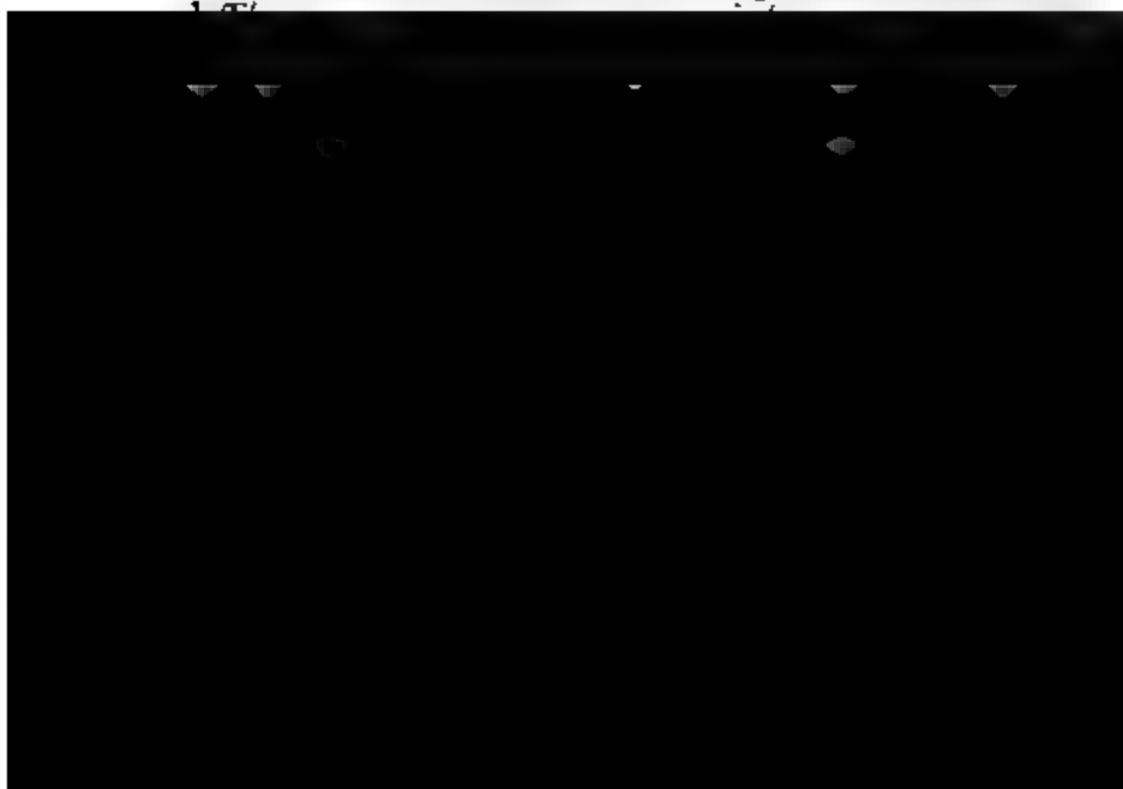
les connues par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d , &c. & les inconnues par les dernières x, y, z .

2°. Cherchez autant d'équations qu'il se trouve de grandeurs inconnues : si cela ne peut se faire, c'est une marque que le *problème* n'est pas *déterminé*, & que l'on peut prendre à volonté une ou plusieurs des grandeurs que l'on cherche. Pour les équations, on les trouve dans l'énonciation du problème, sinon il faut les extraire de l'expression même. ou des circonstances du problème, à l'aide des théorèmes sur l'égalité.

3°. Comme dans l'équation les quantités connues sont mêlées avec les inconnues, il faut les séparer, de manière que d'un côté on n'ait qu'une seule quantité inconnue, & de l'autre toutes celles qui sont bien connues. Pour en venir à bout, on ajoutera les quantités soustraites; on soustraira celles qui sont ajoutées; on divisera celles qui sont multipliées; on multipliera celles qui sont divisées; on extraira la racine des puissances; on élèvera les racines aux puissances, afin de conserver toujours par cette opération une même égalité.

Problème II.

4. Ayant la somme de deux quantités avec leur



$$\text{Donc } a - x = b + x$$

$$x = x \text{ ajouté.}$$

$$a = b + 2x$$

$$b = b \text{ soustrait}$$

$$a - b = 2x$$

$$\hline (2 \text{ Divis.})$$

$$\frac{a-b}{2} = x$$

Ainsi la valeur de x substituée à celle de $y = b + x$, on a $y = b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regle.

Soustrayez de la somme a la différence b , & divisez le reste par 2 : le quotient est la plus petite quantité x . Ajoutez la différence à la somme, & la moitié sera la plus grande quantité y .

Soit pour exemple ,

$$a = 30, b = 8, \text{ on a } (a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11, \text{ \& } (a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 38 : 2 = 19.$$

Remarque.

5. De cette dernière équation on pourroit former une regle générale pour résoudre le problème dans tous les cas qu'on peut le proposer, si l'on substituoit aux lettres de l'algebre les noms des choses exprimées par ces lettres, & si au lieu des signes on faisoit les opérations d'arithmétique qu'ils représentent : mais comme nous ne nous sommes proposé que de faire un abrégé, pour éviter d'être trop diffus, nous ne mettrons point de regles, à moins que des circonstances particulières ne l'exigent. Je le fais d'autant plus volontiers qu'on a beaucoup plutôt résolu un exemple

donné par les chiffres quand on les substitue aux lettres, qu'en se servant d'une règle pour opérer par ces mêmes lettres. D'ailleurs, on trouve souvent dans ces équations, où les quantités connues & inconnues sont mêlées, divers théorèmes très utiles.

Dans l'équation, par exemple, $a - b = 2x$, on voit le théorème suivant.

Si de la somme de deux quantités on soustrait leur différence, ce qui reste est le double de la plus petite de ces quantités.

E X E M P L E.

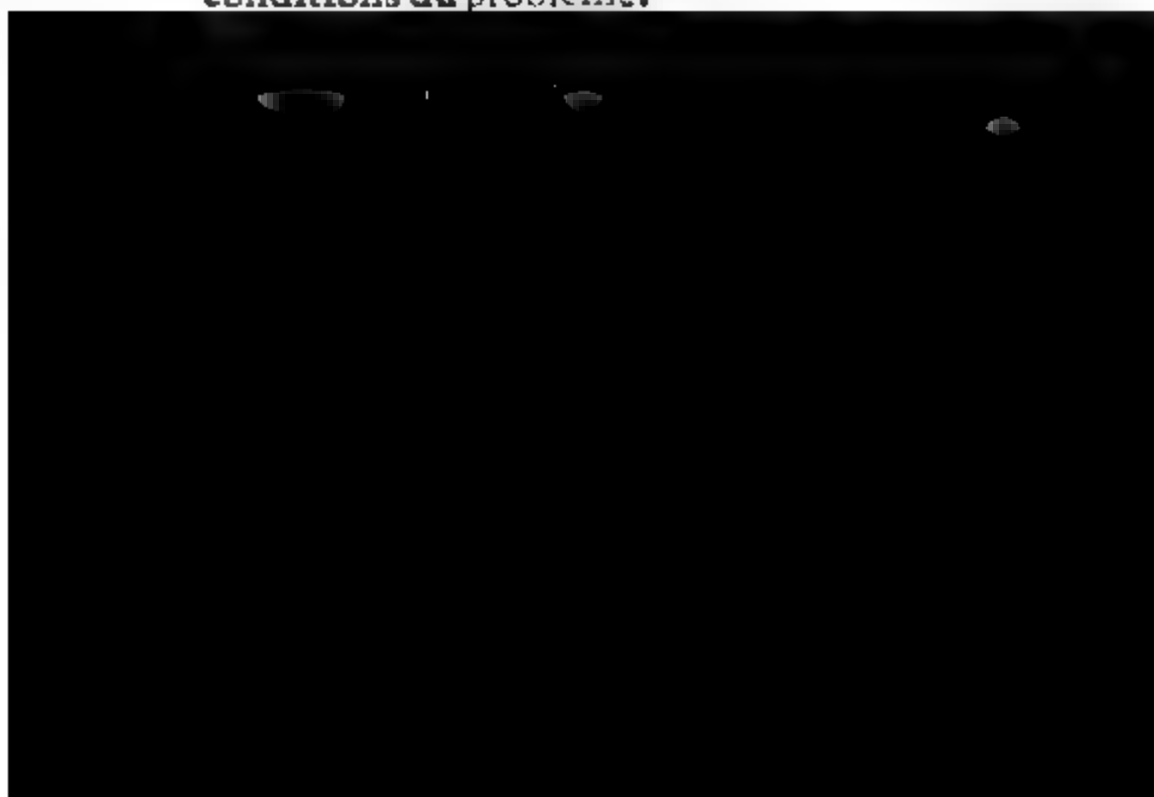
6 & 11 font 17 : je soustrais de 17 la différence de 6 à 11 qui est 5, il reste 12 ; la moitié de 12 est 6, qui est la plus petite des deux quantités proposées.

Problème III.

6. Trouver un nombre dont la moitié avec la troisième & la quatrième partie surpasseront ce nombre d'une seule unité.

Solution.

Soit le nombre cherché x , il sera ainsi par les conditions du problème.



On ne trouve donc aucun autre nombre que 12, qui puisse être celui que l'on cherche.

Problème IV.

7. Ayant la somme de deux nombres & le produit de l'un par l'autre, trouver ces mêmes nombres.

Solution.

Soit la somme $\equiv a$, la demi-diff. $\equiv x$,
le prod. $\equiv b$, le plus gr. nomb. $\equiv \frac{1}{2}a + x$
le plus petit $\equiv \frac{1}{2}a - x$ } §. 3.

Donc par les conditions du problème

$$\frac{1}{4}aa - xx \equiv b$$

$$xx \equiv xx \text{ ajout.}$$

$$\frac{1}{4}aa \equiv b + xx$$

$$b \equiv b \text{ soustr.}$$

$$\frac{1}{4}aa - b \equiv xx$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \equiv x$$

Soit $a \equiv 14$, $b \equiv 48$: on aura $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \equiv$
 $\sqrt{(49 - 48)} \equiv 1$. Donc le plus grand nombre
 fera $\frac{1}{2}a + x \equiv 7 + 1$; & le plus petit $\frac{1}{2}a - x$
 $\equiv 7 - 1 \equiv 6$.

Problème V.

8. Ayant la somme de deux quantités & la différence de leurs quarrés, trouver ces deux quantités.

Solution.

Soit la somme $\equiv a$ demi-diff.
 la diff. des quar. $\equiv b$ des quantit. $\equiv y$:
 la plus grande quantité fera $\equiv \frac{1}{2}a + y$
 la plus petite $\equiv \frac{1}{2}a - y$ (§. 3.)

Le \square de la plus grande $\equiv \frac{1}{4}aa + ay + yy$

— de la plus petite $\equiv \frac{1}{4}aa - ay + yy$

la différ. des \square $b \equiv 2ay$

$\frac{b}{2a}$ Divif.

$$\frac{b}{2a} = y$$

Soit $b \equiv 40$, $a \equiv 10$: on aura $y \equiv \frac{40}{20} \equiv 2$;
& par conséquent un des deux nombres $\frac{1}{2}a + y$
 $\equiv 5 + 2 \equiv 7$; l'autre $\frac{1}{2}a - y \equiv 5 - 2$
 $\equiv 3$.

Problème VI.

9. Ayant la somme de deux quantités , & la somme de leurs quarrés , trouver l'une & l'autre quantité.

Solution.

Soit la premiere somme $\equiv a$ demi-différ.
la deuxieme $\equiv b$, des quantités $\equiv y$.

La plus grande quantité sera $\equiv \frac{1}{2}a + y$ (§. 3).
la plus petite. $\equiv \frac{1}{2}a - y$ (§. 3).

Le \square de la plus grande $\equiv \frac{1}{4}aa + ay + yy$

celui de la plus petite $\equiv \frac{1}{4}aa - ay + yy$

Problème VII.

10. Je vends à un tel prix telle mesure de vin ; combien faudra-t-il que j'y mêle d'eau pour le vendre à un tel prix plus bas ?

Solution.

Soit le plus haut prix $\equiv a$, quantité d'eau $\equiv x$.

Le plus bas $\equiv b$.

Quantité de mesures $\equiv 1$.

Donc le prix de la quantité $1 + x \equiv b + bx$.
Car comme 1 est à b , de même $1 + x$ est à $b + bx$,
& comme l'eau est supposée ne rien coûter, nous disons

$$\begin{array}{r} b + bx \equiv a \\ \hline bx \equiv a - b \\ \hline x \equiv (a - b) : b. \end{array}$$

Soit $a \equiv 16$, $b \equiv 10$: on aura $x \equiv (16 - 10) : 10 \equiv \frac{6}{10} \equiv \frac{3}{5}$.

Problème VIII.

11. Le prix d'un vin excellent & celui d'un vin moins bon une fois posés, déterminer la quantité qu'il faut mêler de ce dernier avec l'autre pour faire un vin qu'on puisse vendre à un prix moyen.

Solution.

Soit le prix du meilleur $\equiv a$	Quantité du vin commun qu'il faut mêler avec le bon $\equiv x$
Du plus commun $\equiv b$	Son prix sera $\equiv b x$
Le prix moyen $\equiv c$	Quantité du bon qu'il faut mêler avec le commun $\equiv 1 - x$
Nombre des mesures $\equiv 1$	Son prix sera $\equiv 1 - a x$.

C'est pourquoy , selon la condition du problème;

$$\begin{array}{rcl} a - ax + bx & = & c \\ + ax & = & ax \text{ ajout.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a + bx & = & c + ax \\ bx & = & bx \text{ soustr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & c + ax - bx \\ c & = & c \text{ soustr.} \end{array}$$

$$a - c = ax - bx = (a - b)x$$

$$\begin{array}{rcl} a - c & & \\ \hline & = & x \end{array}$$

$$a - b$$

Soit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$: on aura $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Il faut donc en prendre $\frac{2}{3}$ du commun, & $\frac{1}{3}$ du meilleur, pour faire le mélange que l'on cherche.

D É F I N I T I O N III.

12. On appelle *racine binome* celle qui est composée de deux parties, comme $a + b$; on appelle *trinome* celle de trois, comme $a + b + c$; *quadrinome*, celle de quatre, comme $a + b + c + d$; en général on donne le nom de *multinome* à toutes

donc la racine binome par elle-même, le produit indiquera de quelles parties est composé le quarré, & comment les parties du quarré se forment des parties de la racine.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a+b \\
 \hline
 + ab + bb \\
 aa + ab \\
 \hline
 aa + 2ab + bb \text{ quarré de la racine binome}
 \end{array}$$

Théorème.

Le quarré d'une racine binome contient les quarrés de chaque partie (a^2 & b^2) & le produit ($2ab$) pris deux fois d'une partie ($2a$) multipliée par l'autre (b).

D É F I N I T I O N IV.

14. L'équation affectée sous le quarré est celle où $xx \pm ax = \pm b$.

Problème X.

15. Résoudre une équation affectée sous le quarré.

Solution.

Prenez x dans l'équation $xx \pm ax = \pm b$, pour une partie de la racine binome; puis a , quantité connue du second membre, fera le double de la racine de l'autre partie: & ainsi $\frac{1}{2}a$ fera l'autre partie de la racine: il s'ensuit donc que les deux nombres $xx \pm ax$ feroient un quarré parfait, s'il n'y manquoit pas le quarré de la partie $\frac{1}{2}a$,

414 É L É M E N T S

ou $\frac{1}{4} a a$. Si l'on ajoute donc ce quarré de part & d'autre , on pourra extraire la racine quarrée , & il sera facile de résoudre l'équation proposée.

$$\begin{array}{rcl}
 x x. & a x & = b^2 \\
 & \frac{1}{4} a a & = \frac{1}{4} a a \\
 \hline
 x x. & a x + \frac{1}{4} a a & = b b + \frac{1}{4} a a. \\
 \hline
 x. & \frac{1}{2} a & = \sqrt{\frac{1}{4} a a. b b} \\
 \hline
 x & = \frac{1}{2} a. & \sqrt{\frac{1}{4} a a. b b}.
 \end{array}$$

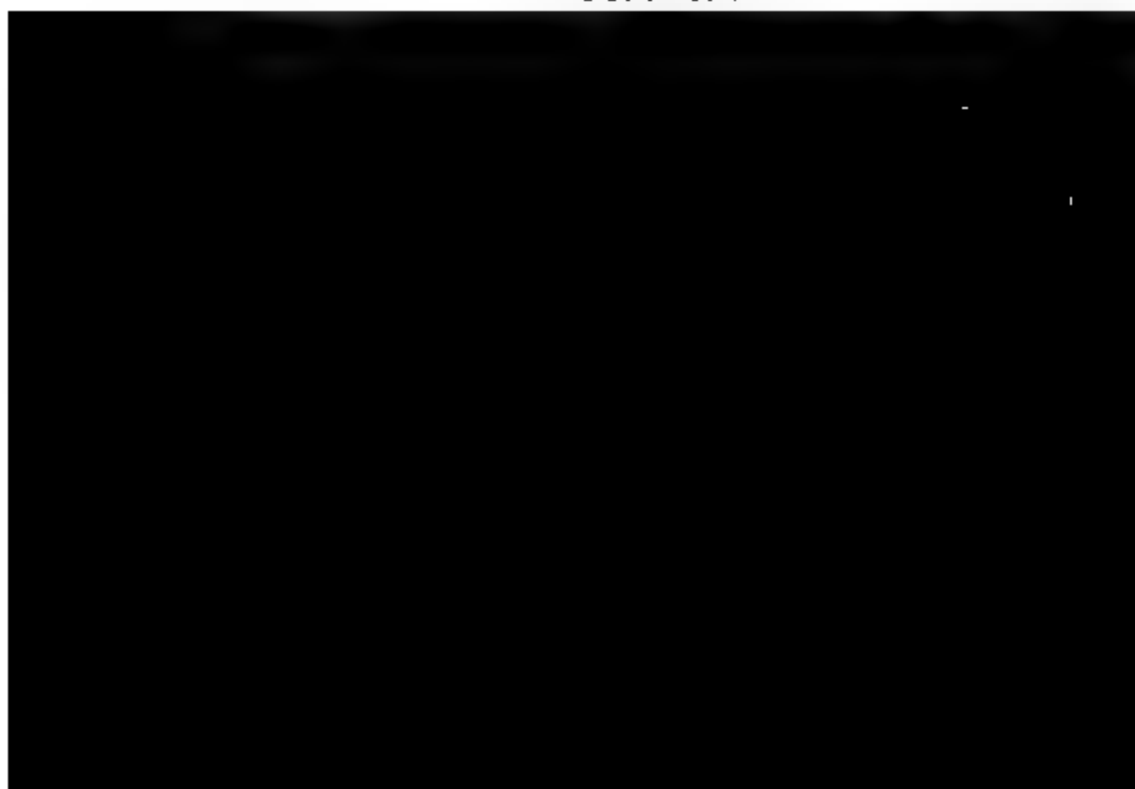
Remarque.

16. J'ai mis des points (.) au lieu des signes + & — afin de n'être pas obligé de distinguer plusieurs cas. On aura lieu de voir souvent l'usage de cette regle dans la suite , il suffit actuellement de l'éclaircir par le problème suivant.

Problème XI.

17. Ayant le produit de deux grandeurs avec leur différence , trouver ces mêmes grandeurs.

Solution.



$$\text{Donc } a : y = b + y$$

$$y \text{ multip.}$$

$$a = by + yy$$

$$\frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$$

$$a + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + by + yy$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}bb} = \frac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b = y.$$

Soit $a = 40$, $b = 3$, on aura $y = \sqrt{40 + \frac{9}{4}}$
 $= \frac{2}{3} = \sqrt{40 + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2} = (\frac{13}{2} = \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5);$
 & par conséquent $x = 8$.

Problème XII.

18. Déterminer la différence de deux quarrés dont les racines ne different que d'une unité.

Soit une racine $= n$, & l'autre $= n + 1$,

Le \square de la grande $= nn + 2n + 1$,

De la petite $= nn$,

Différence $= 2n + 1$.

Solution.

Tout nombre pris deux fois donne un nombre pair. Le nombre pair ne differe de l'impair que d'une unité; le nombre impair, égal à la somme des racines, est donc précisément la différence de deux quarrés qui ne different que d'une unité.

Soient les racines 8 & 9 : la différence des deux quarrés fera $17 = 8 + 9$.

Problème XIII.

19. Déterminer la différence de deux cubes dont les racines ne different que d'une unité.

Solution.

soient les racines n & $n+1$: le plus grand $= n^3 + 3nn + 3n + 1$
 Le cube sera le plus petit $= n^3$
 La différence $= 3nn + 3n + 1$

C'est-à-dire, $m + 2n + 1 + 2nn + n = n + 1 + 2n^2 + n$.

La différence que l'on cherche est donc la somme du carré de la plus grande racine, du carré de la plus petite pris deux fois, & de la petite racine elle-même.

E X E M P L E.

Soient les racines 8 & 9, la différence des cubes sera $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 \cdot 8^2 + 8$.

Problème XIV.

20. Déterminer la somme du premier & du dernier terme, dans la progression arithmétique.

Solution.

Soit le premier terme a , la différence des termes d : on aura la progression

$$\begin{array}{ccccccc} a & a + d & a + 2d & a + 3d & a + 4d & a + 5d & \&c. \\ a + 4d & a + 2d & a & & & & \end{array}$$

des extrêmes est égale à la somme des moyens, pourvu qu'ils soient à égale distance des extrêmes. La somme de ces extrêmes est aussi égale au double du moyen quand le nombre est impair.

EXEMPLE:

$$\begin{array}{ccccccc} 3. & 6. & 9. & 12. & 15. & 18. & 21. \\ & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & 24 & = & 24 & = & 24 & = & 24. \end{array}$$

Corollaire.

21. On aura donc la somme de la progression arithmétique, si l'on multiplie la somme des extrêmes par le nombre qui fait la moitié des termes.

Problème XV.

22. Ayant le premier terme, la différence des termes, & somme de la progression arithmétique, trouver le nombre & le dernier des termes.

Solution.

Soit le premier terme $= a$, le dernier $= y$,
la différence $= d$, leur nombre $= x$,
la somme $= c$; on aura (§. 21.)

$$\frac{1}{2} x (+y) = c, \quad a + x - 1 | d = y$$

2. Multip.

$$\begin{array}{r} ax (+xy) = 2c \\ xy = 2c - ax \\ \hline x \text{ Divif.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y - (2c - ax) : x. \text{ Donc} \\ (2c - ax) : x = a + dx - d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2c - ax = dx + ax - dx \\ \hline d \text{ Divif.} \end{array}$$

$$2c \equiv dxx + 2ax - dx$$

$$(2a - d)$$

$$2c : d \equiv xx + \frac{d}{(2a - d)} x$$

C'est-à dire, si l'on fait $\frac{d}{(2a - d)} \equiv m$

$$2c : d \equiv xx + mx$$

$$\frac{1}{4} m^2 \equiv \frac{1}{4} mm \text{ (§. 15.)}$$

$$2c : d + \frac{1}{4} m^2 \equiv xx + mx + \frac{1}{4} mm$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} mm + 2c : d} \equiv x + \frac{1}{2} m$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} mm + 2c : d} - \frac{1}{2} m \equiv x.$$

Soit $a \equiv 2$, $d \equiv 3$, $c \equiv 57$, on aura $m \equiv (4 - 3) : 3 \equiv \frac{1}{3}$; donc $x \equiv \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{6} \equiv \sqrt{\frac{1169}{36}} - \frac{1}{6} \equiv \frac{37}{6} - \frac{1}{6} \equiv \frac{36}{6} \equiv 6$. Conséquemment $y \equiv 2 + 5 \cdot 3 \equiv 2 + 15 \equiv 17$.

Problème XVI.

23. Trouver combien de fois on peut changer les termes d'une proportion géométrique, sans détruire cette proportion.

Solution.

On n'a qu'à changer les termes autant de fois qu'on le peut, comparer entre elles leurs sommes, leurs différences, &c. on verra pour lors quels

Soit donc $a : ma = b : mb$, à changer, on aura

$$\text{alternando } a : b = ma : mb$$

$$\text{invertendo } ma : a = mb : b$$

$$\text{convertendo } a + ma : a = b + mb : b$$

$$\text{componendo } a + ma : ma = b + mb : mb$$

$$\text{dividendo } ma - a : a = mb - b : b$$

$$ma - a : ma = m - b : mb.$$

$$\text{Or } aa : mma = bb : mmbb.$$

$$\text{Ou généralement } a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n.$$

De même

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

$$\text{Soit selon l'ordre } a : ma = b : mb$$

$$\& ma : mna = mb : mnb$$

on aura tout de même $a : mna = b : mnb$.

$$\text{Soit sans ordre } a : ma = b : mb$$

$$\& ma : mna = \frac{b}{n} : b$$

$$\text{on aura aussi } a : mna = \frac{b}{n} : mb$$

D d ij

Problème XVII.

24. Trouver la manière de changer deux grandeurs, de manière que leur premier rapport demeure le même.

Solution.

Soient les deux quantités a & ma , ayant 1 pour rapport à m ; on aura

$$\text{I } \frac{a : ma}{c \quad c}$$

$$ac : mac \equiv a : ma \\ \equiv 1 : m$$

$$\text{III } \frac{a : ma}{a : mb.}$$

$$a - b : ma - mb \equiv a : ma. \quad a + b : ma + mb \equiv a : ma \\ \equiv b : mb \quad \equiv b : mb \\ \equiv 1 : m \quad \equiv 1 : m$$

$$\text{II } \frac{a : ma}{c \quad c}$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} \equiv a : ma \\ \equiv 1 : m$$

$$\text{IV } \frac{a : ma}{b : mb}$$

Théorème.

I. Si l'on multiplie deux grandeurs par une même troisième, les produits seront en même raison que les grandeurs.

II. Deux grandeurs a & b étant divisées par une même, comme c , les quotients sont en même raison que les grandeurs.

III. Si les parties que l'on soustrait des grandeurs sont en même raison, les restes sont en même raison.

multiplié par le dernier dans une progression géométrique.

Solution.

Soit le premier terme a , l'exposant m ; on aura la progression

$$\begin{array}{ccccccc} a & ma & m^2a & m^3a & m^4a & m^5a & m^6a \\ m^1a & & m^3a & m^5a & & & a \\ \hline m^6a & = & m^6a & m^6a & = & m^6a & \end{array}$$

Théorème.

Dans toute progression géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, qui de part & d'autre sont en même rapport avec les extrêmes; & si le nombre des termes est impair, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, & au produit des autres moyens, qui sont en même raison que quand le nombre des termes est pair.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{ccccccc} 3. & 6. & 12. & 24. & 48. & 96. & \\ & & & 12 & 6 & 3 & \\ \hline & & & 288 & = & 288 & = 288 \end{array}$$

Exemple de la seconde partie du théorème.

$$\begin{array}{ccccccc} 3. & 6. & 12. & 24. & 48. & 96. & 192. \\ & & & 24 & & & 3 \\ \hline & & & 576 & = & 576 & \end{array}$$

Problème XIX.

26. Déterminer le quotient dans une division faite de la différence du premier & du dernier

D d iij

terme, par l'exposant qu'on aura diminué d'une unité.

Solution.

Soit le premier terme a , l'exposant m , le nombre des termes n ; le dernier terme sera $m^{n-1}a$, la différence du premier & du dernier $m^{n-1}a - a$. Si on divise cette différence par $m - 1$, on aura le quotient $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$, &c.

$$m - 1 \mid m^{n-1}a - a \quad \left\{ \begin{array}{l} m^{n-2}a + m^{n-3}a + \\ m^{n-4}a + m^{n-5}a + \\ m^{n-6}a + m^{n-7}a, \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$+ m^{n-2}a - m^{n-2}a$$

$$+ m^{n-2}a - a$$

$$+ m^{n-2}a - m^{n-3}a$$

$$+ m^{n-3}a - a$$

$$+ m^{n-3}a - m^{n-4}a$$

$$+ m^{n-4}a - a$$

$$+ m^{n-4}a - m^{n-5}a$$

$$+ m^{n-5}a - m^{n-6}a \quad \&c.$$

$$+ m^{n-6}a - m^{n-6}a$$

Si l'on détermine n , par exemple, à 7, on aura $n - 7 = 0$; conséquemment $m^{n-7}a = m^0a$, & ainsi la division sera finie, &c. de cette division naît le théorème suivant.

Théorème

Si l'on divise la différence du premier & du dernier terme d'une progression géométrique par l'exposant auquel on a ôté une unité, le quotient sera la somme de tous les termes, excepté le dernier.

Corollaire.

Si l'on ajoute donc le dernier terme au quotient dont je viens de parler, on aura la somme de toute la progression géométrique.

D É F I N I T I O N V.

27. On dit que trois ou quatre termes sont en *proportion harmonique*, lorsque la différence du premier & du second a une même raison avec la différence du second & du troisième, que le premier terme a avec le troisième. Ainsi ces trois nombres 60, 30, 20, font une proportion harmonique; car la différence de 60 à 30, qui est 30, a une même raison avec 10, différence de 30 à 20, que 60 avec 20.

Et dans le second cas, on dit que quatre grandeurs sont en *proportion harmonique*, lorsque la différence de la première & de la seconde est à la différence de la troisième & de la quatrième, comme la première grandeur à la quatrième. Si dans le premier cas on continue les termes avec la même méthode, ce sera une *progression harmonique*.

Remarque.

Cette *proportion* qu'on nomme *harmonique* a pris son nom de ce que les Musiciens s'en servent dans leurs compositions, & en font beaucoup de cas. Elle est, pour ainsi dire, composée de la proportion arithmétique & de la proportion géométrique, comme on le voit dans le raisonnement de la définition ci-dessus.

Problème XX.

28. Ayant deux grandeurs, en trouver une
D d i v

troisième qui leur soit en proportion harmonique :

Solution.

Soit la première $\equiv a$, la troisième $\equiv x$,
la seconde $\equiv b$,

on aura (§. 27.)

$$b \text{ --- } a : x \text{ --- } b \equiv a : x$$

$$ax \text{ --- } ab \equiv bx \text{ --- } ax$$

$$2ax \text{ --- } bx \equiv ab$$

$$\text{---} (2a \text{ --- } b) \text{ Divif.}$$

$$x \equiv \frac{ab}{2a - b}$$

Soit $a \equiv 10$, $b \equiv 16$; on aura $x \equiv 160$;
($20 \text{ --- } 16$) $\equiv 160 : 4 \equiv 40$.

Corollaire I.

29. Si $2a \equiv b$, on aura $x \equiv ab : 0$; conséquemment $1 : 0 \equiv x : ab$; &c ainsi dans ce cas on ne sauroit trouver un nombre qui soit en proportion harmonique , encore moins le trouvera-t-on lorsque b fera plus grand que $2a$.

Corollaire II.

Solution.

Soit la première $\equiv a$,
 la seconde $\equiv b$, la troisième $\equiv x$,
 on aura (§. 17.)

$$x - a : b - x \equiv a : b$$

$$bx - ab \equiv ab - ax$$

$$ax + bx \equiv 2ab$$

$$x \equiv 2ab : (a + b)$$

Soit $a \equiv 10$, $b \equiv 40$, on aura $x \equiv \frac{800}{50} \equiv 16$:

Problème XXII.

32. Trois grandeurs étant données, en trouver une quatrième qui soit en proportion harmonique.

Solution.

Soit la première grandeur $\equiv a$,
 la seconde $\equiv b$, la 4^e $\equiv x$
 la troisième $\equiv c$,
 on aura (§. 27.)

$$b - a : x - c \equiv a : x$$

$$bx - ax \equiv ax - ac$$

$$ac \equiv 2ax - bx$$

$$2a - b \text{ Divif.}$$

$$ac : (2a - b) \equiv x$$

Soit $a \equiv 6$, $b \equiv 8$, $c \equiv 12$, on aura $x \equiv 72$:
 $(12 - 8) \equiv 72 : 4 \equiv 18$.

Problème XXIII.

33. Trouver un cercle égal à la superficie d'un cylindre.

Solution.

Soit le diamètre du cylindre d , sa circonférence p , sa hauteur a ; on aura la superficie ap (§. 197, Géom.). Soit le diamètre du cercle x ; on aura $d : p = x : \frac{p}{2}$ (§. 129, Géom.); la circonférence du cercle est donc $\frac{p}{2}$, & sa superficie sera $\frac{p}{4}x$ (§. 134, Géom.). Donc

$$\begin{aligned} \frac{px^2 : 4d}{x^2} &= \frac{ap}{4ad} \\ x &= \sqrt{4ad}, \text{ ou } \frac{1}{2}x = \sqrt{ad}. \end{aligned}$$

Théorème.

La superficie d'un cylindre est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le diamètre & la hauteur du cylindre.

Problème XXIV.

34. Connoissant la hauteur d'un cylindre égale

(§. 129, Géom.) ; sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197, Géom.). C'est pourquoi

$$\frac{\frac{1}{6} p d^2}{\frac{4}{6} p d^3} = \frac{apx^2 : 4d}{4d \text{ Multip.}}$$

$$\frac{\frac{4}{6} p d^3}{\frac{2}{3} \frac{d^3}{a}} = \frac{apx^2}{ap \text{ Divif.}}$$

$$\frac{2}{3} \frac{d^3}{a} = x^2$$

Et par conséquent $3a : 2d = d^2 : x^2$.

Problème XXV.

35. Ayant le diamètre & la hauteur d'un cône, trouver le diamètre d'un cylindre qui soit égal au cône en hauteur & en solidité.

Solution.

Soit le diamètre du cône d , sa hauteur a , le diamètre du cylindre x , le rapport du diamètre à la circonférence $d : p$; on aura pour la solidité du cône $\frac{1}{12} adp$ (§. 201, Géom.) ; la circonférence du cylindre $px : d$, & sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197, Géom.) ; ainsi donc

$$\frac{\frac{1}{12} adp}{\frac{4}{12} ad^2 p} = \frac{apx^2 : 4d}{4d \text{ Multip.}}$$

$$\frac{\frac{4}{12} ad^2 p}{\frac{1}{3} d^2} = \frac{apx^2}{ap \text{ Divif.}}$$

$$\frac{\frac{1}{3} d^2}{\sqrt{\frac{1}{3} d^2}} = x^2$$

x est donc le moyen proportionnel entre $\frac{1}{3} d$ & d .

Problème XXVI.

36. Connoissant le diamètre & la hauteur d'un

cône, trouver le diamètre d'une boule qui lui soit égal.

Solution.

Soit le diamètre de la base d'un cône d , sa circonférence $= p$, sa hauteur a , le diamètre de la boule x ; on aura pour solidité du cône $\frac{1}{12} a d p$ (§. 201, Géométrie); & la solidité de la boule $\frac{1}{6} x^3$ (§. 208, Géom.). De là

$$\frac{1}{12} a d p = \frac{1}{6} x^3 : 6 d \text{ Multip.}$$

$$\frac{1}{2} a d^2 p = x^3 \quad p \text{ Divif.}$$

$$\frac{1}{2} a d^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} a d^2} = x$$

Problème XXVII.

37. Expliquer la nature des équations.

Solution.

1°. Prenez autant de valeurs que vous voudrez de la grandeur inconnue, formez-en de simples équations, mais égales à zéro.

2°. Multipliez ces simples équations l'une par l'autre: il en naîtra des équations plus grandes.

Multipliez d'abord la premiere équation par la seconde, vous multiplierez ensuite le produit par la troisieme.

$$\begin{array}{rcl}
 x - 2 & = & 0 \\
 x + 3 & = & 0 \\
 \hline
 3x - 6 & & \\
 x^2 - 2x & & \\
 \hline
 x^2 + x - 6 & = & 0 \\
 x - 4 & = & 0 \\
 \hline
 -4x^2 - 4x + 24 & & \\
 x^3 + x^2 - 6x & & \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 - 10x + 24 & = & 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 x - a & = & 0 \\
 x + b & = & 0 \\
 \hline
 +bx - ab & & \\
 xx - ax & & \\
 \hline
 x^2 - ax + bx - ab & = & 0 \\
 x - c & = & 0 \\
 \hline
 x^3 - cx^2 - bcx - abc & = & 0 \\
 +bx^2 + acx & & \\
 -ax^2 - abx & & \\
 \hline
 & &
 \end{array}$$

En faisant attention à ces équations qu'on peut facilement élever à des degrés plus hauts, on observera avec Harriot & Descartes,

1°. Que la grandeur connue du second membre est la somme des racines, mais marquées par un signe contraire; que la grandeur connue du troisieme est la somme des produits des membres multipliés deux à deux; que la grandeur connue du quatrieme est la somme des produits des racines multipliés trois à trois, &c. enfin, que le dernier membre est le produit de toutes les racines. Dans l'équation quarrée, par exemple la grandeur connue $1 = 3 - 2$ du second membre, les racines sont $+2$ & -3 . De même dans l'équation cubique, la grandeur connue du second membre $-13 = +3 - 4 - 2$, les racines sont -3 , $+4$, & $+2$. La grandeur connue du troisieme membre dans l'équation cubique $-10 = -6 + 8 - 12$,

les racines sont -3 , $+4$ & $+2$. Le dernier membre dans la même équation est $+24 = 2$.

3. 4.

2°. Il faut aussi observer qu'il y a autant de véritables racines dans une équation, qu'il s'y trouve de changements de signes ; & autant de fausses qu'il y a de successions de ces mêmes signes.

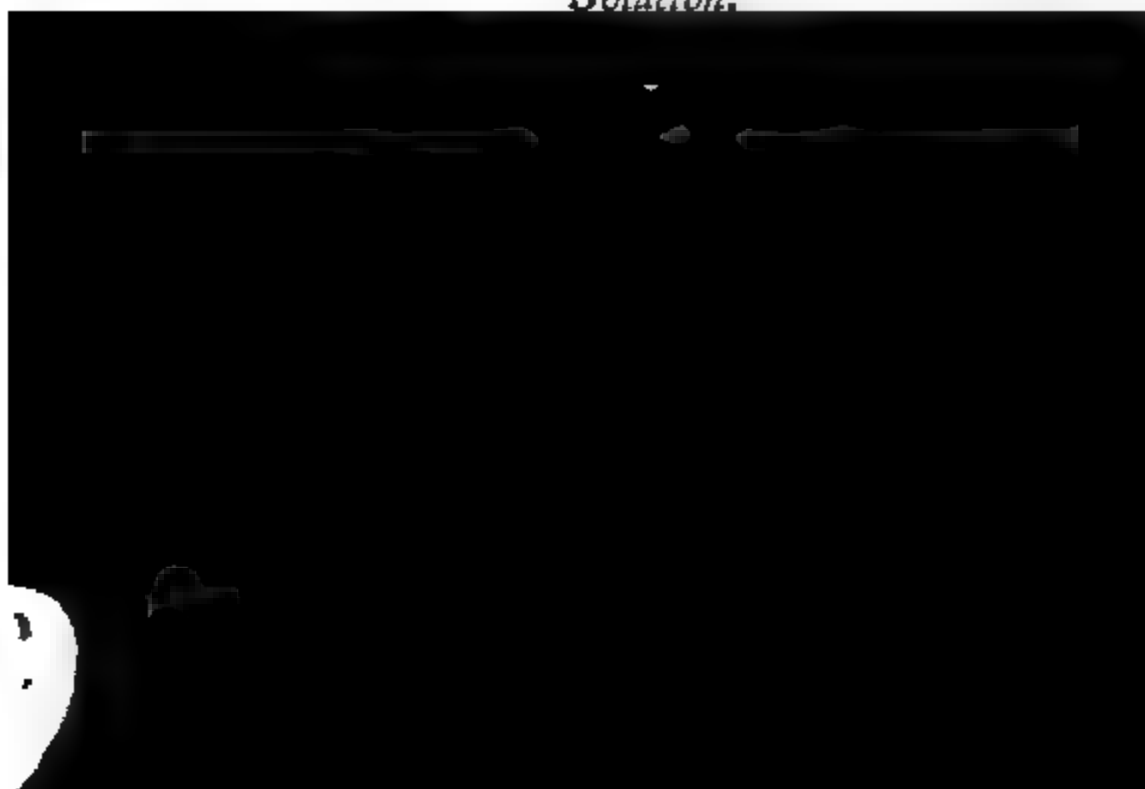
EXEMPLE.

Dans l'équation quadrée $x^2 + x - 6 = 0$, il n'y a qu'une succession de signe $++$ & un changement $+-$. Cette équation a deux racines, l'une vraie $+2$, l'autre fausse -3 . Dans l'équation cubique $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, il y a deux changements de signes $+-$ & $-+$; une succession $---$. On y trouve aussi trois racines, deux vraies $+2$ & $+4$, & une fausse -3 .

Problème XXVIII.

38. Trouver toutes les racines *rationnelles* contenues dans une équation.

Solution.



le dernier membre 8 a pour produits 2 & 4.
Qu'on mette donc $x = 2$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 4 \\ - 6x = - 12 \\ + 8 = + 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

2 est la véritable racine de l'équation. Qu'on mette donc aussi $x = 4$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ - 6x = - 24 \\ + 8 = + 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

On aura donc aussi 4 pour l'autre racine véritable de l'équation.

Soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, les produits du dernier membre 15 sont 1, 3, 5 : si l'on substitue 1 à la place de x , on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 1 \\ - 3x^2 = - 3 \\ - 13x = - 13 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

1 est donc une des véritables racines. Qu'on substitue ensuite 3 à x , on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 \\ - 3x^2 = - 27 \\ - 13x = - 39 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = - 24 \end{array}$$

3 n'est donc pas une des véritables racines.

Qu'on substitue enfin 5 à x , on aura

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 125 \\
 - 3x^2 = -75 \\
 - 13x = -65 \\
 + 15 = +15 \\
 \hline
 0 = 0
 \end{array}$$

On voit par-là que 5 est l'autre véritable racine;

Autrement.

39. Les équations composées étant formées par la multiplication des simples (§. 37), si quelque une des racines étoit rationnelle, l'équation pourra se diviser par une équation simple formée de x , & d'un des produisants du dernier membre; essayons donc de faire cette division.

Soit l'équation proposée $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Les produisants du dernier membre sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12; d'où les simples équations $x - 1 = 0, x + 1 = 0, x - 2 = 0, x + 2 = 0, x - 3 = 0, x + 3 = 0, x - 4 = 0, x + 4 = 0, x - 6 = 0, x + 6 = 0, x - 8 = 0, x + 8 = 0, x - 12 = 0, x + 12 = 0$ sont composées. En vain voudroit-on faire la division par $x - 1$, & $x + 1$; d'où il est facile de conclure que 1 n'est pas une fausse racine, ni une des véritables. Il faut

Par où je vois que 2 est une des racines véritables ; & comme 12 est le dernier membre dans le quotient, 8 & 12 ne sont pas dans le nombre des racines.

On essaie en vain de diviser par $x - 3$ l'équation quarrée $x^2 - x - 12 = 0$, mais on en vient à bout par $x + 3$.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 12 \quad (x + 4 \\
 x + 3 \) \ x^2 + 3x \\
 \hline
 - 4x - 12 \\
 - 4x - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

3 est donc une fausse racine de l'équation, parce que $x - 4 = 0$, 4 est une autre racine véritable.

De même, soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$; les produisans du dernier membre seront 1, 3, 5 ; il faut donc essayer les diviseurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Commençons à faire la division par $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \quad (x^2 - 2x - 15x - 1) \\
 x^3 - x^2 \\
 \hline
 - 2x^2 - 13x \\
 2x^2 + 2x \\
 \hline
 - 15x + 15 \\
 15x + 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

On voit donc que 1 est une racine vraie dans l'équation proposée. On ne réussiroit pas à vouloir faire la division par $x-3$ dans l'équation quartée; mais on en viendroit à bout en prenant $x+3$ pour diviseur.

Comme les problèmes ci-dessus & les exemples rapportés ne mettent pas suffisamment au fait de la formation des équations composées, lorsqu'on n'est pas bien versé dans l'étude de l'algebre; je vais donner en peu de mots quelques explications qui serviront à faire concevoir la solution des deux problèmes précédents.

Des équations composées.

40. Les équations composées se forment des équations simples, en faisant passer dans le premier membre la grandeur qui est dans le second. De ces deux simples équations, par exemple, $x=a$, & $x=b$, je forme celle-ci $x-a=0$, & $x-b=0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre, c'est-à-dire, le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le second par le second; ce qui me donne l'équation

$$x - a = 0$$

par conséquent autant de valeurs que l'équation a de degrés.

Les produisants d'une équation composée se nomment *racines de l'équation*, soit qu'ils soient égaux ou qu'ils ne le soient pas. Ainsi *tirer les racines d'une équation*, c'est trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

Si dans une équation composée l'inconnue se trouve à un même degré dans plusieurs termes, on les écrit les uns sous les autres, parcequ'ils n'en font qu'un; ainsi $-ax - bx$ ne font qu'un terme, comme dans l'exemple cité.

Il faut observer dans la formation des équations, 1°. que le *coefficient* du second terme est égal à la somme des racines de l'équation; 2°. que dans les équations qui ont plus de trois termes, le coefficient du troisième comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent se multiplier; 3°. que dans les équations qui ont plus de quatre termes, le coefficient du quatrième contient les produits des quatre racines multipliées trois à trois, & ainsi des autres équations qui ont plus de cinq, six termes, &c. 4°. enfin, que, dans toutes les équations, le dernier terme est une quantité toute connue, qui est le produit de toutes les racines.

Corollaire.

41. Si le second terme manque dans une équation, il faut nécessairement qu'il y ait des racines positives & des négatives qui s'entre-détruisent; si le troisième terme manque dans celles qui en ont plus de trois, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs, & d'autres positifs qui s'entre-

détruisent; si le quatrième, &c. Lorsque l'équation a tous ses termes, on la résout facilement en se rappelant que le carré de tout binôme $x + b$ contient dans son premier terme le carré du premier terme x du binôme, deux fois le premier terme x multiplié par le second, ou le double du second multiplié par le premier; & enfin le carré du second. Nous avons déjà fait presque toutes ces observations, §. 37.

Problème XXXIX.

42. Extraire par approximation la racine de quelque équation que ce soit.

Solution.

Pour donner plus de clarté à la règle, nous allons l'appliquer aux exemples, en commençant par l'équation quadrée.

Soit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Supposons que la racine est $8 + y$, en sorte que y marque l'excès ou le défaut de 8 à l'égard de la racine : on aura donc

$$\begin{aligned} xx &= 64 + 16y + yy \\ - 5x &= - 40 - 5y \\ - 31 &= - 31 \\ 7 + 11y + yy &= 0. \end{aligned}$$

Mais comme la valeur de x dans les parties décimales n'est pas encore assez déterminée, mettez $x = 8.6 + y$, & en recommençant l'opération vous trouverez

$$\begin{array}{r}
 xx = \frac{7396}{100} + \frac{172}{10}y + yy \\
 - 5x = -\frac{430}{10} - 5y \\
 - 31 = -31 \\
 \hline
 \frac{396}{700} - \frac{430}{10} - 31 + \frac{172}{10}y - 5y = 0.
 \end{array}$$

Ayant réduit les fractions à la même dénomination, l'équation se change en

$$\begin{array}{r}
 7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0 \\
 - 0.04 + 12.20y = 0 \\
 12.20y = 0.04 \\
 y = 0.0032.
 \end{array}$$

Cette opération donne donc la racine cherchée $8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Si l'on desire une racine encore plus exacte, il faudroit mettre $x = 8.6032 + y$; d'où l'on auroit $xx = 74.01505024 + 17.20640000y + yy - 5x = -43.01600000 - 5.00000000y - 31 = -31.00000000$.

$$- 0.000094976 + 12.20640000y = 0$$

$$12.20640000y = 0.000094976$$

$$y = 0.000077808$$

$$\text{Donc } x = 8.603277808$$

Voyons à présent la maniere d'extraire la racine

de l'équation cubique $x^3 + 2xx - 23x - 70 = 0$.

Mettez

$$5 + y = x$$

On aura $x^3 = 125 + 75y...$

$$2x^2 = 50 + 20y...$$

$$- 23x = - 115 - 23y$$

$$- 70 = - 70$$

$$- 10 + 72y = 0$$

$$72y = 10$$

$$y = 0.1$$

Par conséq. $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Mettez ensuite $x = 5.1 + y$; vous aurez

$$x^3 = 132.951 + 78.030y...$$

$$2xx = 52.020 + 20.400y...$$

$$- 23x = - 11.300 - 23.000y...$$

$$- 70 = - 70.000$$

$$- 2929 = 95.430y = 0$$

$$95.430y = 2.629$$

$$y = 0.0348$$

Par conséq. $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

... Pour trouver plus facilement la racine dans une



$$\begin{array}{r}
 x^3 = 125 + 75y + 15yy \\
 2x^2 = 50 + 20y + 2yy \\
 \hline
 - 23x = - 115 - 23y \\
 - 70 = - 70 \\
 \hline
 - 10 + 72y + 17yy = 0 \\
 17yy + 72y = 10 \\
 \hline
 yy + 4.2352y = 0.58823530 \\
 4.484229764 = 4.48422976 \\
 \hline
 yy + 4.2352y + 4.484229764 = 5.07246506 \\
 \hline
 y + 2.1176 = 2.2522 \\
 y = 0.1346 \\
 \text{donc } x = 5.1346
 \end{array}$$

Si l'on mettoit de rechef $x = 5.1346 + y$, & qu'on cherchât la valeur de y comme auparavant, on approcheroit de si près de la véritable racine dans ce second calcul, qu'on y toucheroit pour ainsi dire.

Fin de l'Algebre.

FAUTES A CORRIGER

dans le premier volume.

CALCUL LITTÉRAL.

COMME on pourroit croire qu'il manque quelque chose dans les problèmes sur l'opération des fractions avec des grandeurs entières, où l'on passe du problème II au problème VI, sans que l'on trouve les problèmes intermédiaires III, IV & V; voici la manière de remplir cette lacune qui n'est qu'apparente.

Page 123. *Remarque.* Si l'on propose de multiplier ou de diviser, &c. effacez ce mot *Remarque*, & tout l'*alinéa* qui le suit, & mettez en place : *Problème III.* Multiplier ou diviser des grandeurs entières avec des fractions, par des grandeurs entières & des fractions.

Page 124. *Remarque.* Présentement qu'on fait le calcul des grandeurs entières, &c. effacez ce mot *Remarque*, & tout l'*alinéa* suivant, & mettez à la place : *Problème IV.* Faire une division complexe, composée de grandeurs entières & de fractions, & dont le diviseur est pareillement composé de fractions.

Page 125. *Corollaire.* On doit voir par cette méthode qui enseigne à employer le calcul des fractions, &c. effacez ce mot *Corollaire*, & tout l'*alinéa* qui le suit, & mettez en place : *Problème V.* Continuer une division à l'infini, quand même le dividende & le diviseur n'auroient point de grandeurs semblables.

Page 184, à la marge, Pl. III, lisez Pl. II.

Page 221, ligne 7, EA : AF — CD, lisez — EC.

Page 238, ligne 2, 144, lisez 44.

Ibid. ligne 29, Mclutez, lisez Menez.

Page 251, ligne 17, 892, lisez 8920.

Page 278, ligne 17, 28', lisez 29'.

Page 304, ligne 18, — C, lisez — G.

Page 327, ligne 9, 342, lisez 432.

Ibid. ligne 11, effacez 280.

Page 329, ligne 6, le point, lisez le poids.

Page 342, ligne 26, Mettre en mouvement une machine élastique, lisez par la force élastique.

etiquette palpable.

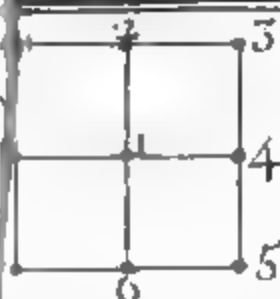
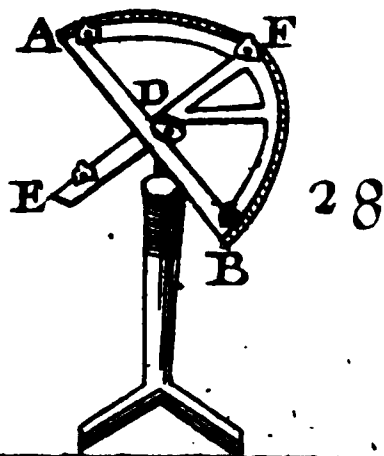
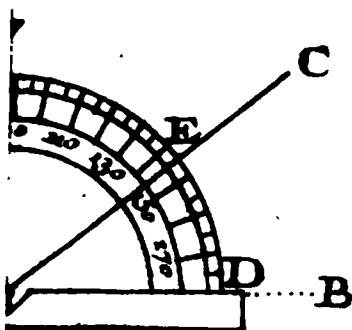
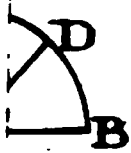
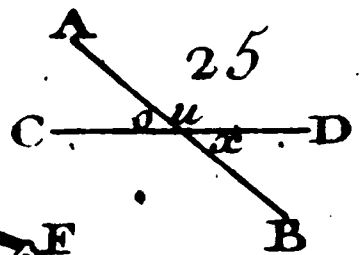
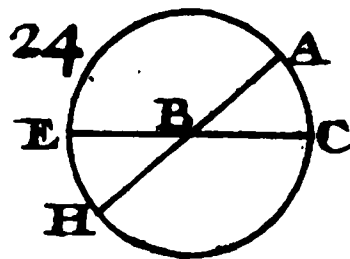
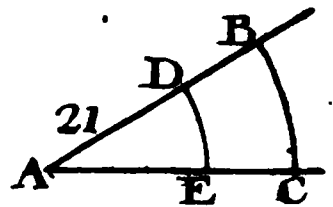
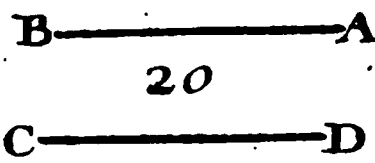
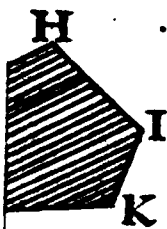
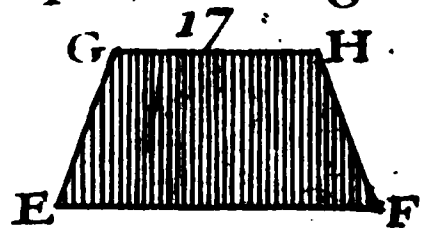
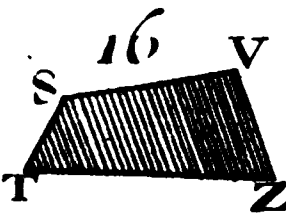
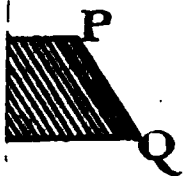
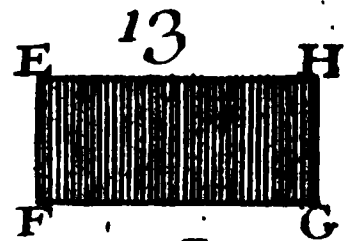
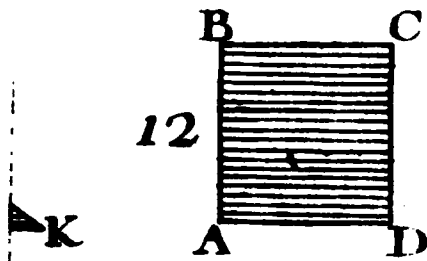
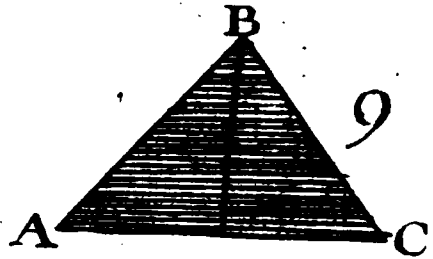
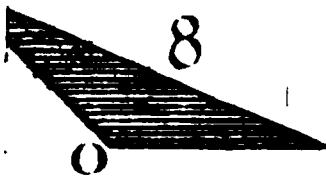
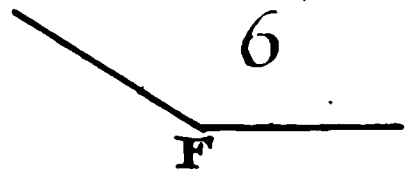
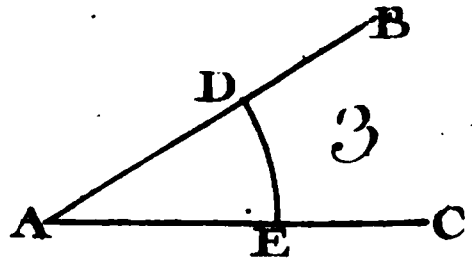
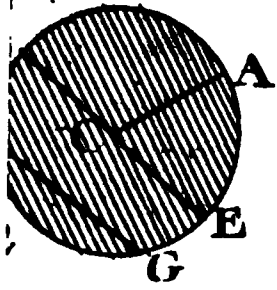
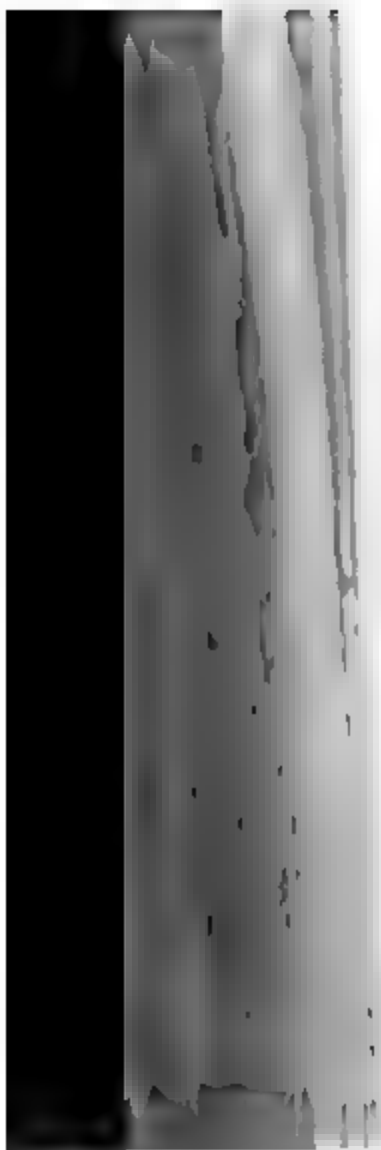


Fig 3

	94084
	24186
	41794
	54284
	63968
	71880
	78568
	84358
	89464
	94080

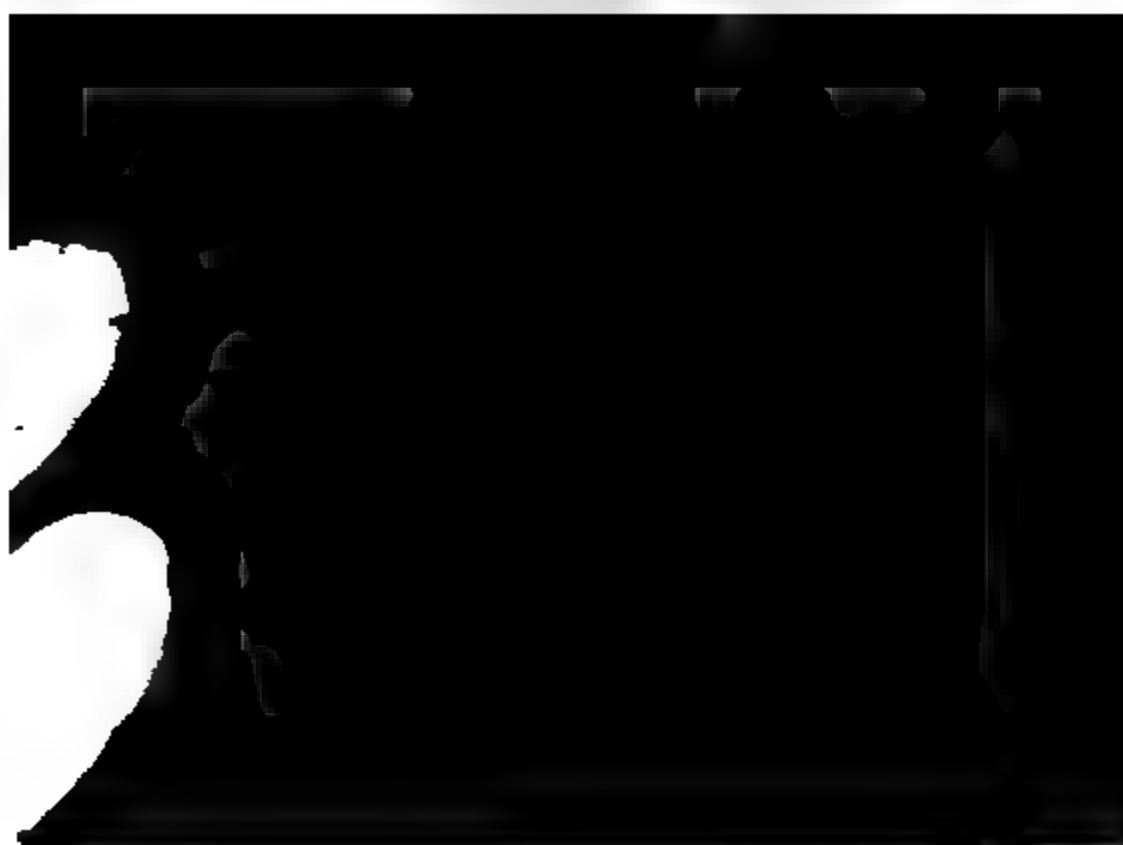
Les carrés qui servent d'indices ou de
sont les petits carrés qui servent pour

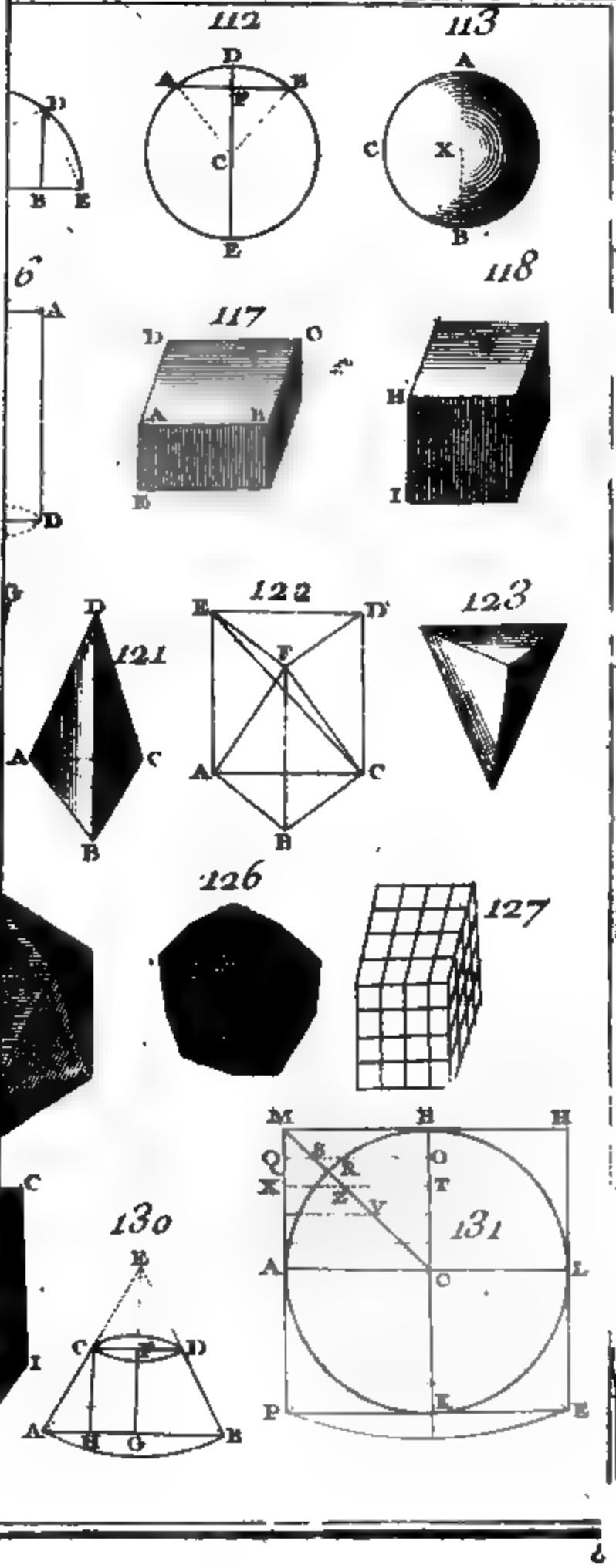


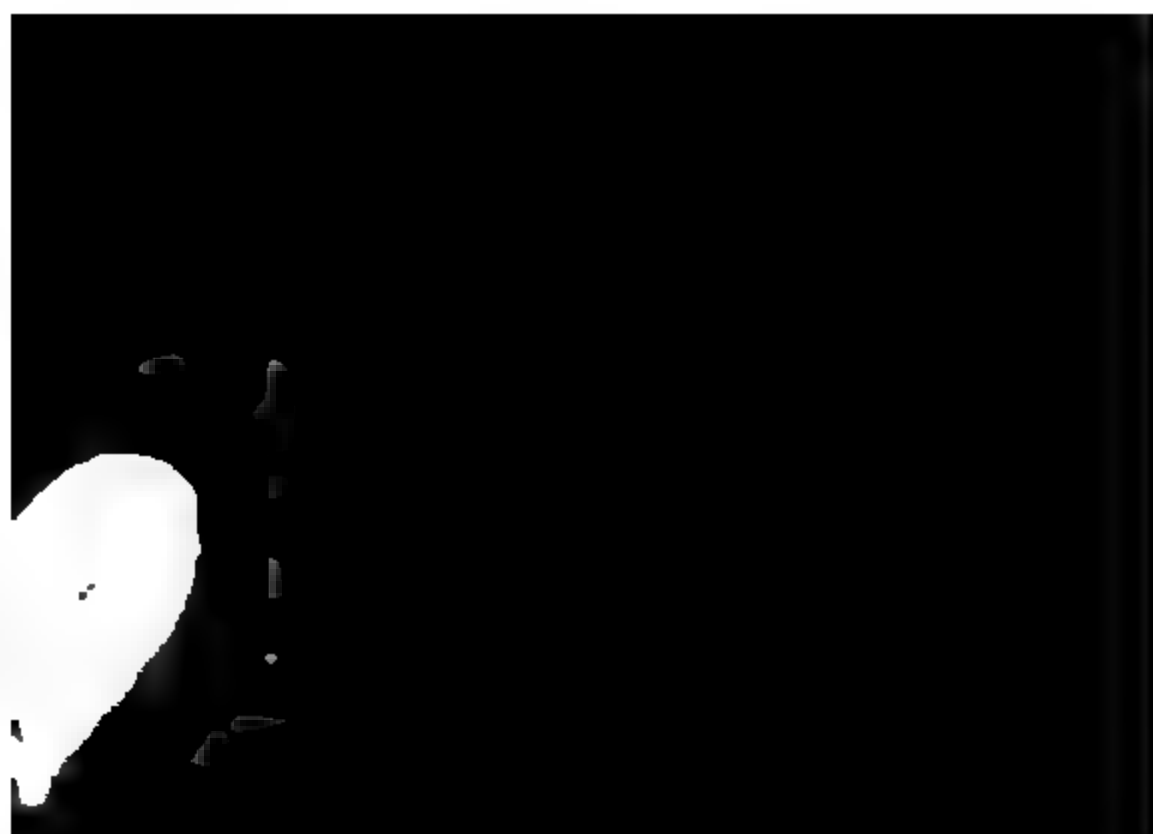




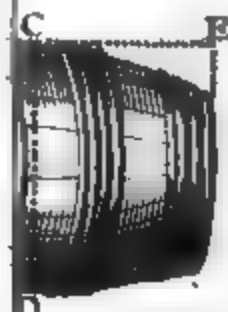




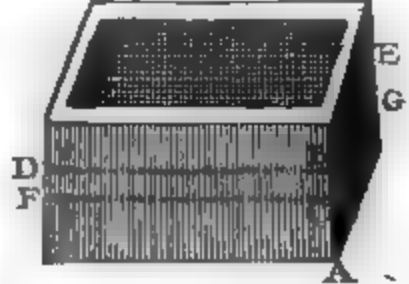




133

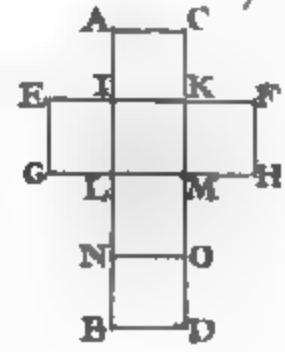
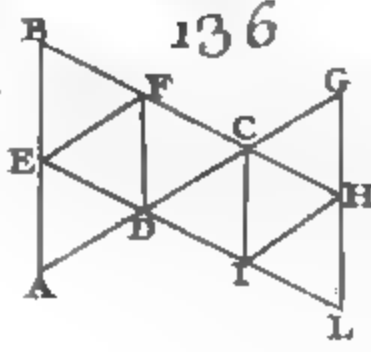


134

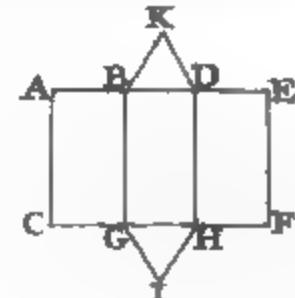
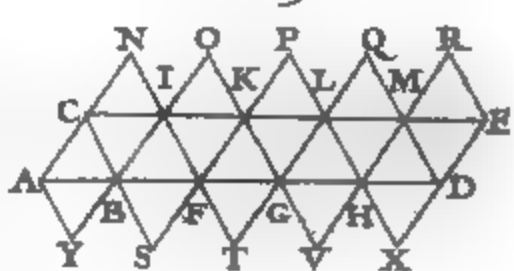
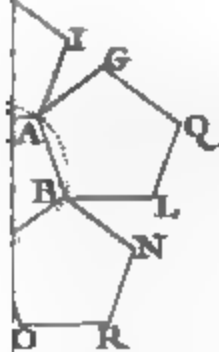


137

136



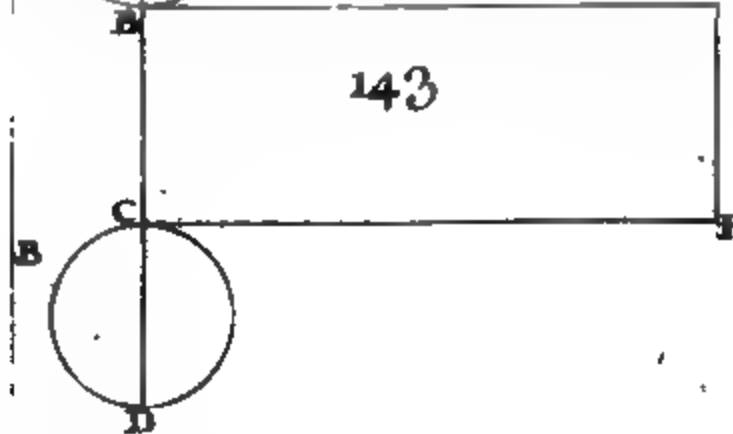
139



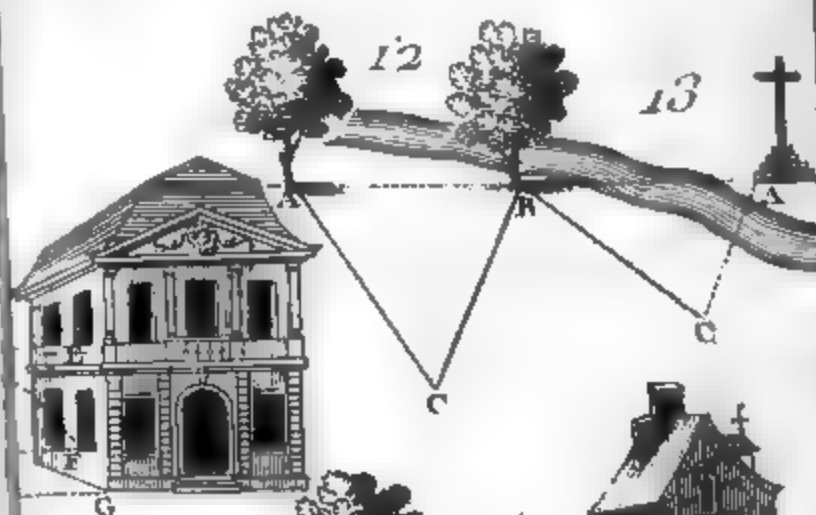
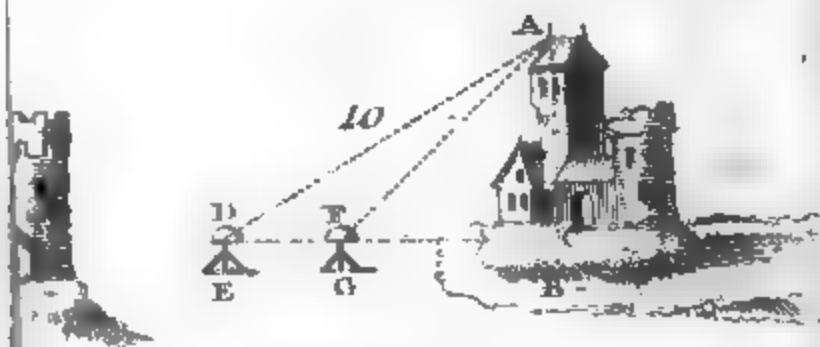
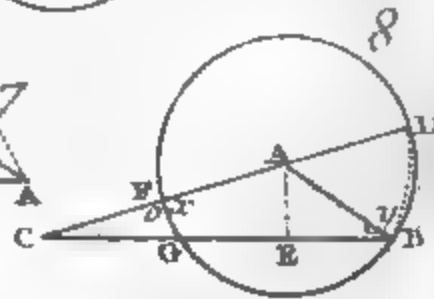
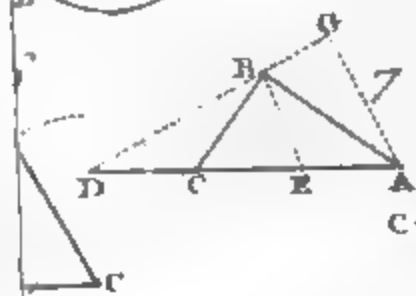
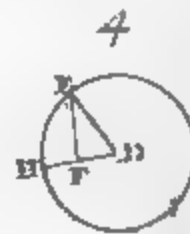
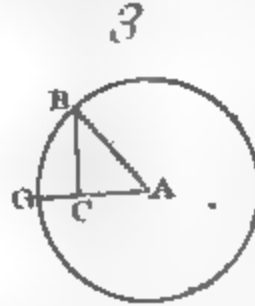
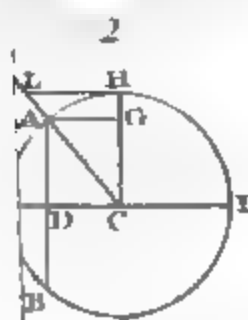
141

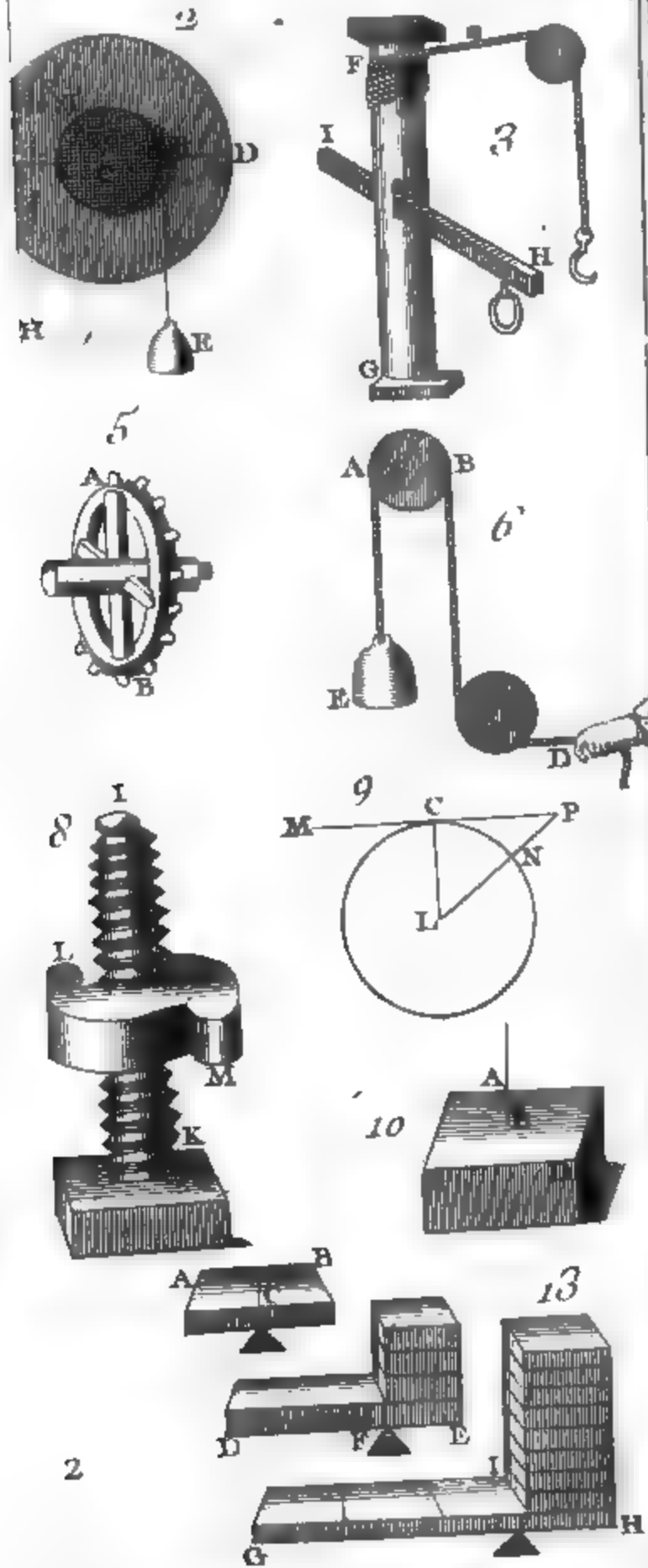


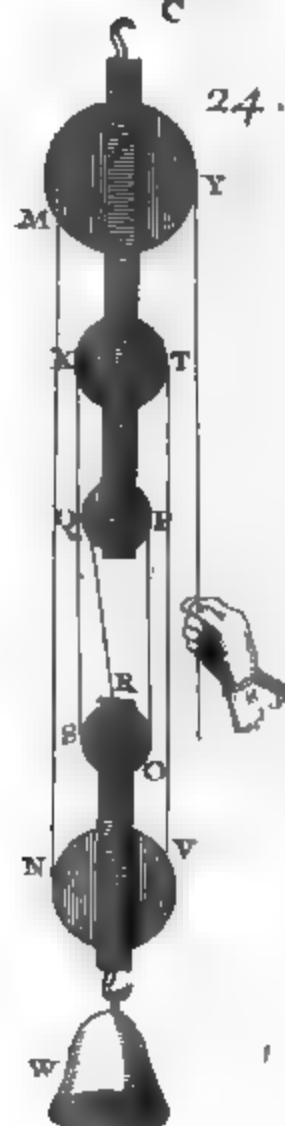
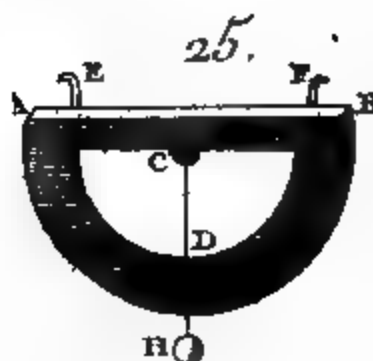
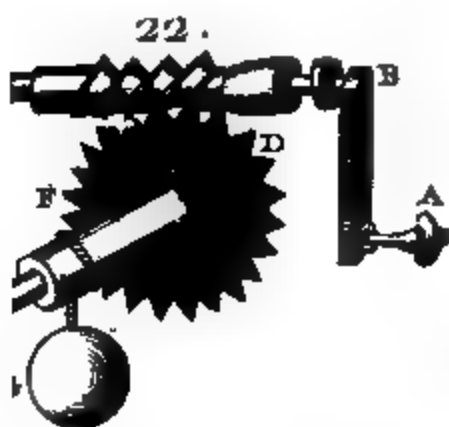
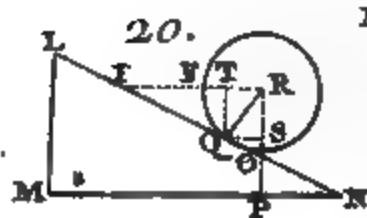
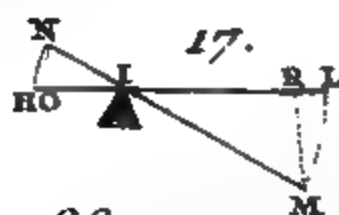
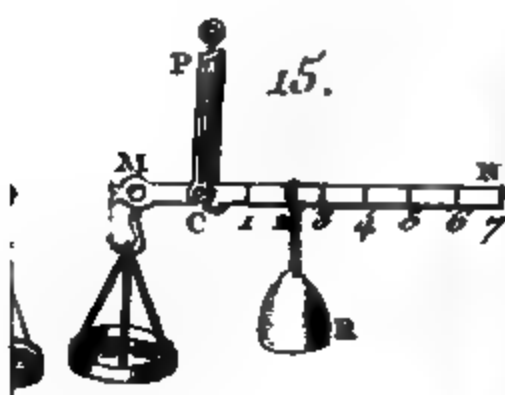
143

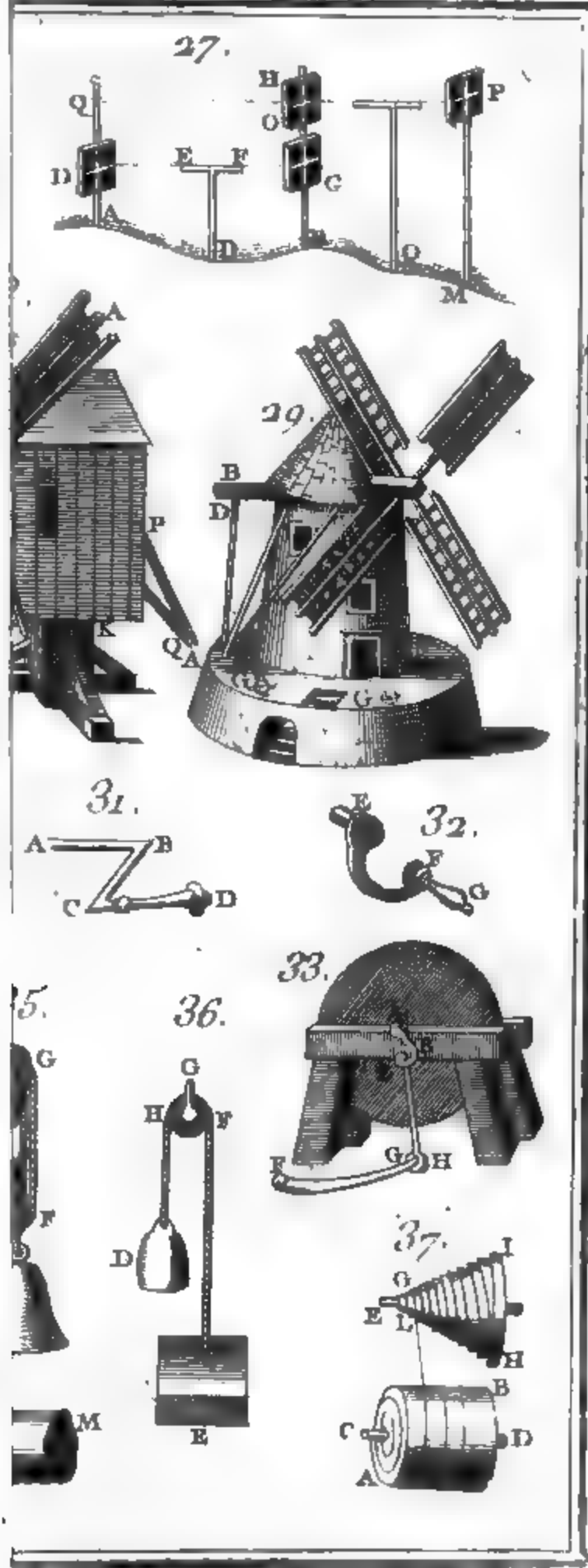


Trigonometrie



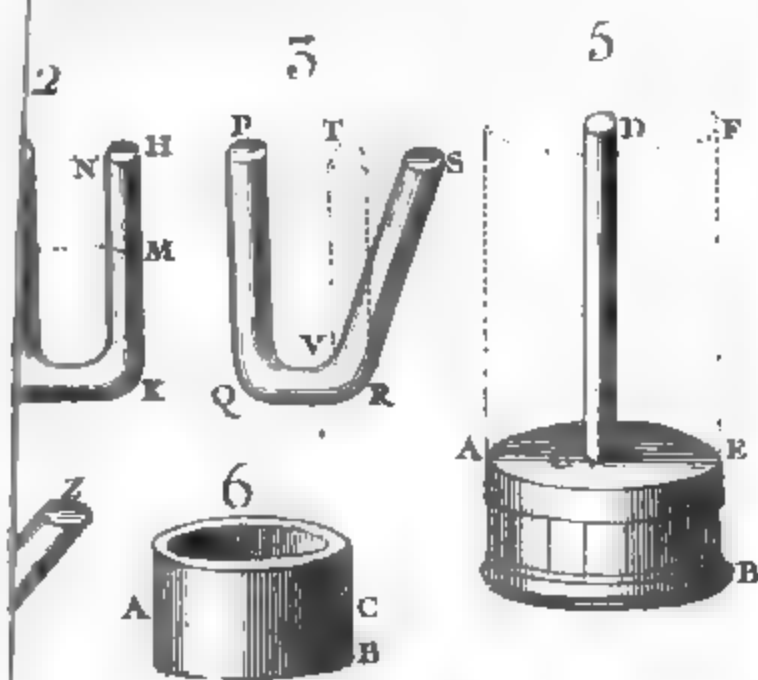




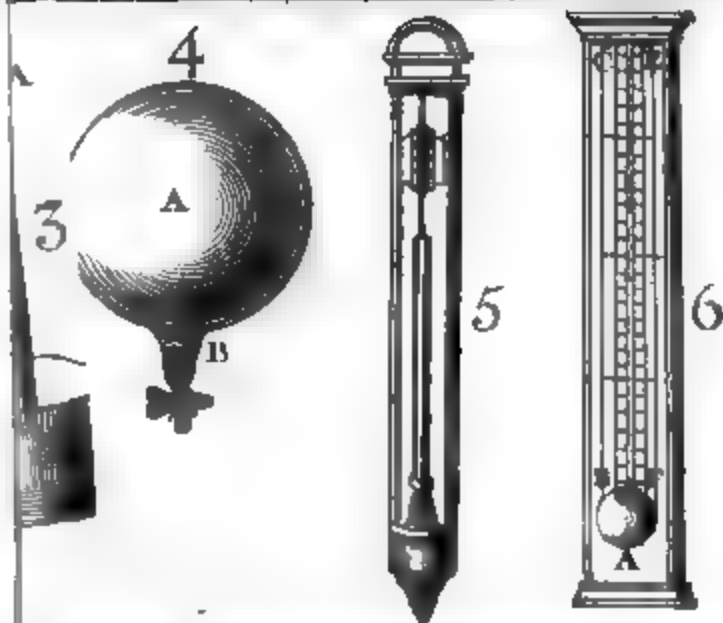
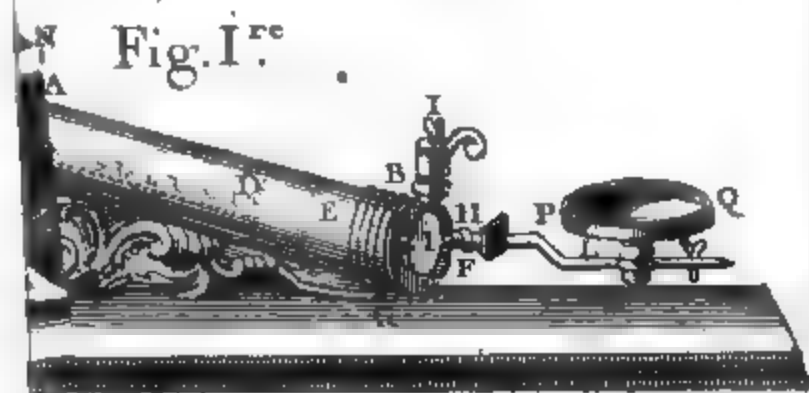


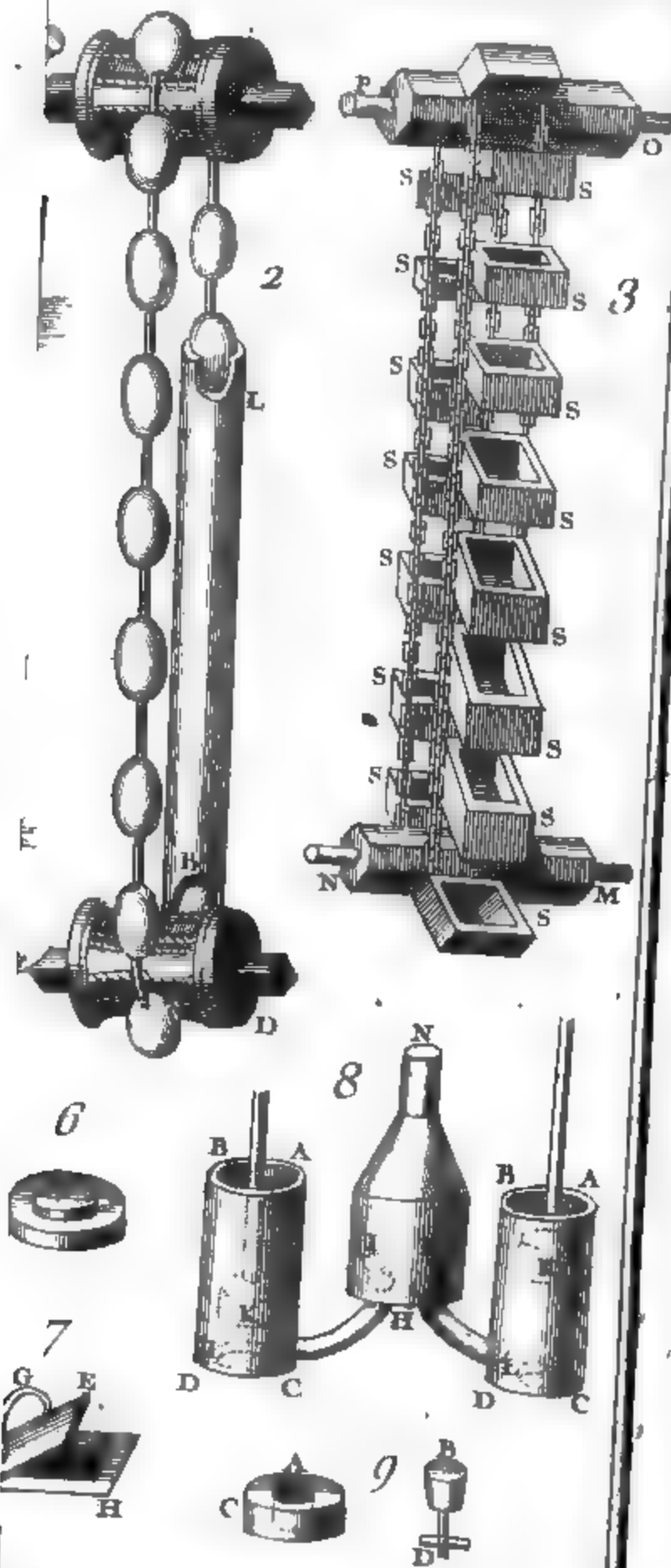


Hydrostatique.



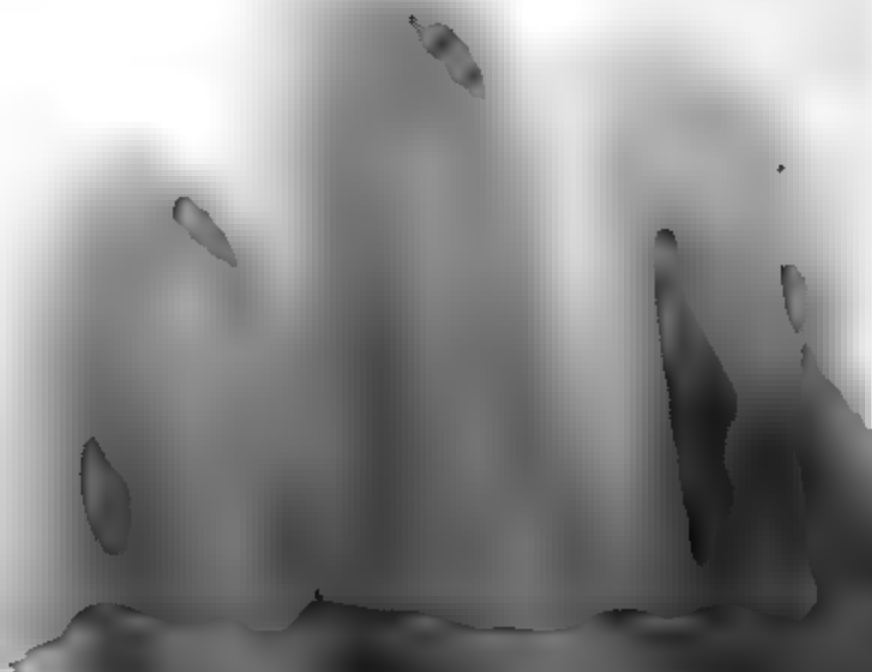
Airometrie.





1





.















